LEÇONS

SUR

L'HYDRODYNAMIQUE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie

Quai des Grands-Augustins, 55

86737-29

CHAIRE DE MÉCANIQUE DES FLUIDES ET APPLICATIONS

FONDATION DU SOUS-SECRÉTARIAT D'ÉTAT DE L'AÉRONAUTIQUE

LEÇONS

SUR

L'HYDRODYNAMIQUE

PAR

HENRI VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1929

INTRODUCTION

« Ἄριστον μὲν ὕδωρ »

Les pages qui suivent constituent à peu près la substance des Conférences que j'ai été chargé de faire à la Sorbonne, dans le courant des seconds semestres de [illegible] à 1926, dans la Chaire de Mécanique des Fluides.

Dans la première partie, j'ai cherché à donner une idée assez complète, et aussi simple que possible, de la théorie des sillages, concernant le mouvement permanent d'un solide dans un fluide parfait. Cette théorie a été édifiée sur les principes fondamentaux posés par Kirchhoff, Helmholtz, M. Lévi-Civita et M. Brillouin ; des développements, prolongements et perfectionnements très considérables ont été apportés par divers auteurs, au premier rang desquels il convient de citer M. U. Cisotti. J'ai moi-même, ainsi que mes élèves (et notamment M. R. Thiry) donné quelques efforts à la question. Je renverrai ceux que la bibliographie complète pourrait intéresser à un article résumant l'état de la théorie en 1917, paru dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* de 1917.

Il est bien connu que, si l'on envisage le mouvement permanent d'un fluide parfait incompressible par rapport à un solide (ou inversement), on se heurte au paradoxe de d'Alembert dès que l'on n'admet pas la présence de discontinuités dans le fluide ; l'existence même de tourbillons ne suffit pas pour échapper à ce paradoxe, si ces tourbillons restent à distance finie. La théorie des sillages est une approximation obtenue en supposant qu'à l'arrière du corps il se forme une plage de fluide en repos par rapport au solide ; le long des bords de cette plage, le reste du fluide glisse : ces bords sont donc des surfaces de discontinuité pour les vitesses, mais la pression doit y rester continue. On montre aussi — et c'est le paradoxe de M. Brillouin — que les surfaces de discontinuité doivent nécessairement s'étendre jusqu'à l'infini, dès qu'on désire écarter la présence de pressions négatives dans le fluide (cf., par exemple, H. Villat, *Aperçus Théoriques sur la Résistance des Fluides*, Gauthier-Villars, 1920).

Dans ces conditions, la résistance totale du fluide (résultante des pressions sur la surface du corps), est en effet différente de zéro ; l'expérience prouve qu'elle est plus faible dans la théorie que dans la réalité.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, la première série des présentes leçons contient le développement de ces principes, avec l'exposé de diverses difficultés auxquelles donne lieu la théorie et la manière de lever

ces difficultés. Nous terminerons par la mise en évidence d'un fait qui semble fondamental : sur un exemple simple, nous montrons que la solution du problème concernant un solide déterminé peut n'être pas unique ; le développement de cette circonstance, et des conséquences qu'elle comporte, se lira avec intérêt dans la belle thèse de M. R. Thiry (*Annales de l'École Normale*, 1921).

Les caractères de la solution relative aux sillages, ne sont, d'après ce qu'on vient de dire, pas entièrement satisfaisants. Ainsi qu'il est maintenant bien classique, on sait que l'expérience fournit trois sortes de régimes pour un fluide rencontrant un solide donné ; en allant des vitesses faibles aux grandes vitesses du courant général, on obtient d'abord un régime où, après un décollement progressif, la configuration répond assez bien à la configuration théorique développée ci-dessus, à cela près que le régime est toutefois tourbillonnaire, les tourbillons étant placés à l'arrière, dans une région plus ou moins vaste que la surface de discontinuité théorique ne fait que schématiser. Si la vitesse du courant croît, on obtient le régime de tourbillons alternés de Bénard-Karman, puis le régime turbulent. (Un très ingénieux dispositif, dû à MM. Toussaint et Carafoli, permet de reproduire très aisément ces phénomènes). Les deux derniers régimes ne donnent pas à proprement parler des mouvements permanents ; mais le premier, dont la théorie des sillages constitue une approximation, comporte toujours des tourbillons notables. Or ces tourbillons sont dûs à la viscosité du fluide réel, même si cette viscosité est très faible. Il s'ensuit que pour étudier le cas du fluide parfait *considéré comme cas limite*, une bonne méthode consisterait à étudier un fluide visqueux, et à chercher ce que deviennent les caractéristiques de son mouvement lorsque l'on fait tendre la viscosité vers zéro. Le mouvement-limite ainsi obtenu satisfera bien entendu aux équations de l'hydrodynamique du fluide parfait, mais avec des conditions aux frontières, qu'il serait malaisé de trouver *à priori*.

C'est cette méthode qui a été suivie par M. C.-W. Oseen, le savant mathématicien d'Upsala, et par ses élèves, notamment par M. N. Zeilon (1).

La seconde partie de ces leçons est consacrée à l'exposé de la théorie de M. Oseen (cf. notamment : *Acta Mathematica*, 34, 1911 ; *Annalen der Physik*, b. 46, 1915 ; et de très nombreux et importants *Mémoires* publiés dans l'Arkiv for Matem. (Stockholm) depuis 1906).

Le passage à la limite annoncé comporte des difficultés considérables. Cela était en somme à prévoir, et M. J. Boussinesq l'avait bien mis en évidence lorsqu'à propos d'une question simple, dès 1880, il avait montré la non analycité de la solution d'un problème lorsque la viscosité tendait vers zéro. L'exposé de cet exemple — sur lequel M. M. Roy est récemment revenu (*Nouvelles Annales*, juin 1925) — nous rendra attentif à certaines complexités qui peuvent intervenir dans le cas limite.

---

(1) Cf. N. Zeilon « *On potential problems in the theory of fluid resistance* » Kungl. Sv. Vetenskapsakad. Handl., Stockholm 1924.

Nous exposons ensuite les principes de la théorie d'Oseen, laquelle est basée sur une transformation initiale des équations de l'hydrodynamique, en équations intégrales. M. Oseen est finalement conduit à un mouvement permanent limite, dans lequel le fluide situé à l'arrière du corps, à l'intérieur du cylindre circonscrit parallèle à la direction générale du mouvement, est dans un état tourbillonnaire particulier ; le reste du fluide est sans tourbillons ; des conditions analytiques qui seront exposées en détail, déterminent le mouvement dans l'une et l'autre région.

La méthode employée donne ainsi *une* solution limite. Nous exposons les résultats obtenus par M. N. Zeilon (loc. cit.) dans la recherche de solution effectives, poussées jusqu'au calcul numériques, dans des cas particuliers importants et essentiels. Nous donnons également des indications sur l'extension que nous avons obtenue dans le cas des fluides limités par des parois fixes. (H. Villat «*Sur une extension de la méthode d'Oseen*» Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome I du Jubilé de MM. P. Appell et E. Picard, page 429).

Par ailleurs la surface de discontinuité constituée par le cylindre circonscrit indiqué plus haut est une surface de discontinuité pour les pressions. Ce caractère rend vraisemblable et désirable l'existence d'une solution échappant à cet inconvénient. Les développements de M. Oseen sont donc de toute façon extrêmement importants à connaître, car ils devront nécessairement être des plus utiles pour la recherche d'une autre solution éventuelle (1). Nous serions heureux que notre exposé, qui doit tant aux travaux de M. Oseen, puisse contribuer à faciliter aux chercheurs la voie à suivre.

Notre but a été d'exposer des théories dues, soit à divers auteurs, soit à nous-même, d'une façon aussi claire que possible pour un lecteur possédant les ressources mathématiques usuelles, mais non forcément renseigné à fond sur les questions spéciales. C'est en vue d'un tel lecteur, que nous avons été amené, dans le courant de ces leçons, à introduire par exemple un exposé en quelques lignes, de la théorie des fonctions elliptiques, sous une forme qui permet d'obtenir, en peu de mots et naturellement, toutes les propriétés essentielles de ces fonctions. De même, un problème particulier nous a servi à exposer les propriétés utiles de l'équation de la chaleur, sous une forme assez intuitive. Et en vue d'un exemple à traiter, nous avons donné une courte théorie des fonctions de Legendre, si importantes en physique mathématique.

---

(1) Depuis que ces lignes ont été écrites, les recherches récentes ont montré combien la remarque précédente se trouve exacte, à un degré presque inespéré. Car ce sont justement les potentiels d'Oseen eux-mêmes qui interviennent dans la construction des nouvelles solutions, échappant cette fois aux défauts signalés, et dont M. N. Zeilon a commencé l'étude dans les *Nova Acta R. Soc. Scientiarum Upsaliensis* de 1927.

TABLE DES MATIÈRES

LEÇONS SUR L'HYDRODYNAMIQUE

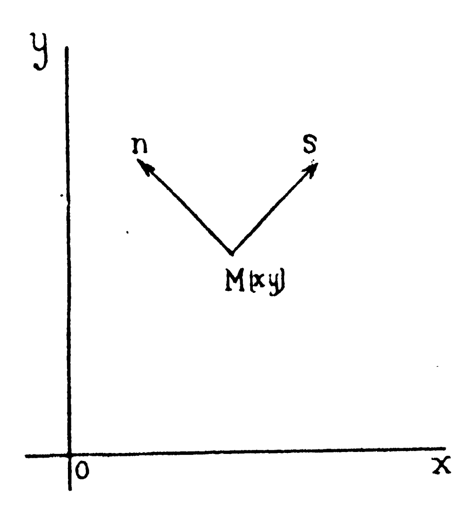
CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Soit $f(z)$ une fonction *analytique* de la variable complexe $z = x + iy$, nous écrirons cette fonction

$$f(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

en séparant les parties réelles et imaginaires. On sait qu'une fonction analytique est telle que, en admettant l'existence et la continuité, en général, des dérivés de φ et ψ, le rapport de l'accroissement $d(\varphi + i\psi)$ à l'accroissement $d(x + iy)$ possède une limite indé-



pendante de la direction du chemin (dx, dy). Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont les conditions de Cauchy :

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Ces relations (1) en entraînent immédiatement d'autres équivalentes : soient s et n deux direction rectangulaires en $M(xy)$

de telle façon que l'angle sMn soit superposable à xoy ; on a

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s},$$

et, par suite :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{dn}\right) = \frac{d\psi}{dn};$$

D'où, évidemment, les deux formules :

$$(1') \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\psi}{dn}, \qquad \frac{d\varphi}{dn} = -\frac{d\psi}{ds}.$$

Des équations (1) on tire :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta\psi = 0;$$

φ et ψ sont donc deux *fonctions harmoniques associées*; si l'une est connue, l'autre s'en déduit, à une constante réelle près, par l'intégration d'une différentielle totale.

Théorème de Cauchy. — Si φ et ψ sont continues et finies dans dans un domaine D simplement connexe, ainsi que leurs dérivées, on a :

$$(2) \qquad \int_C f(z)\,dz = \int_C \varphi\,dx - \psi\,dy + i\int_C \psi\,dx + \varphi\,dy = 0$$

pour tout chemin fermé C situé dans D.

Cela résulte immédiatement des conditions (1), et la réciproque de cette proposition est entièrement évidente.

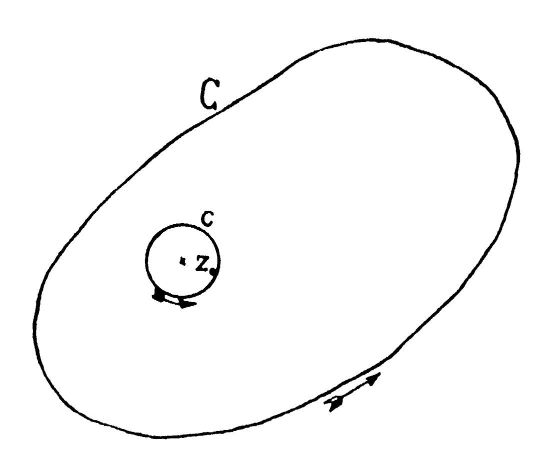
Formule de Cauchy. — Soit $f(z)$, une fonction analytique régulière (finie et continue) dans l'intérieur d'un contour C et sur le contour; la fonction $\frac{f(z)}{z - z_0}$, où z_0 est un point intérieur, sera, régulière entre C et la petite circonférence c de centre z_0, de rayon ε, comprise dans C. On voit aisément que :

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\,d\theta \underset{\varepsilon = 0}{\rightarrow} 2i\pi f(z_0).$$

Et comme le premier membre est indépendant de ε, on a la ***formule de Cauchy :***

$$(3) \qquad f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Entre autres conséquences, cette formule montre qu'il y a au plus une fonction $f(z)$ régulière dans C et prenant sur C des valeurs



données d'avance. D'ailleurs ces valeurs mêmes ne sauraient être entièrement arbitraires, puisque nous avons vu que la connaissance de φ par exemple détermine ψ à une constante près. Il résultera de la suite, que l'on peut se donner, par exemple, φ sur C, et alors $f(z)$ est déterminé à une constante près (imaginaire pure).

Formule de Taylor. — Appliquons la formule (3) en supposant que C soit une circonférence de centre O. Nous pourrons évidemment écrire :

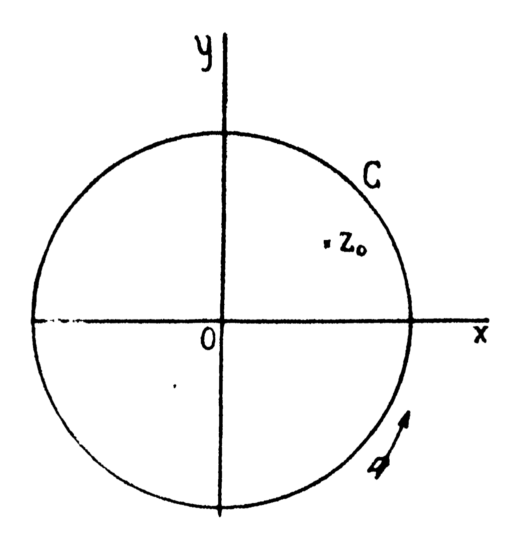
$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \dots \qquad + \frac{z_0^n}{z^{n+1}} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n+1} \frac{1}{z - z_0}.$$

Transportant dans (3), on constate sans peine que le « terme complémentaire » tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et il vient la formule, valable pour la fonction analytique régulière dans le cercle C :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{z_0}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \dots \\ &\quad + \frac{z_0^n}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \dots \end{aligned} \right.$$

C'est la série de Mac Laurin que l'on peut écrire aisément :

$$f(z_0) = f(o) + \frac{z_0}{1} f'(o) + \dots \qquad + \frac{z_0{}^n}{n!} f^{(n)}(o) + \dots$$



On a, de même, la formule de Taylor valable dans tout cercle de centre z'_0 où la fonction est régulière :

$$f(z_0) = f(z'_0) + \frac{z_0 - z'_0}{1} f'(z'_0) + \dots \qquad + \frac{(z_0 - z'_0)^n}{n!} f^{(n)}(z'_0) + \dots$$

Application du théorème de Liouville. — Si une fonction analytique est régulière et *partout finie* dans tout le plan, c'est une *constante*. Car tous les coefficients $\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$ $(n \neq 0)$ calculés sur une circonférence C de très grand rayon R, tendront vers zéro avec $\frac{1}{R}$. Or ces coefficients (proportionnels aux dérivées $f^{(n)}(o)$) sont indépendants de R, donc ils sont nuls, c. q. f. d.

Formule de Laurent. — Si $f(z)$ est régulière dans la couronne circulaire comprise entre les deux circonférences C et C', de centre o commun, il est clair qu'on pourra écrire :

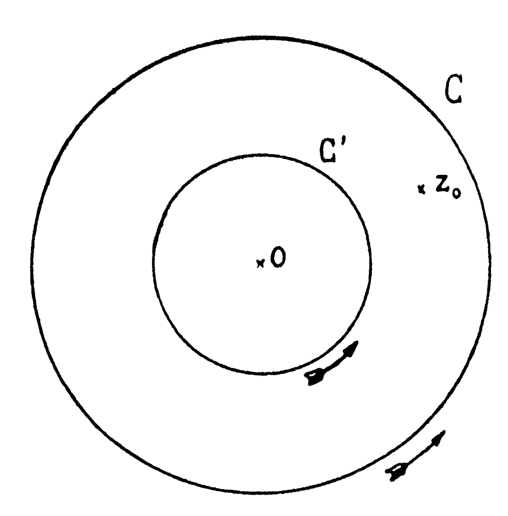
$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

On transforme la première intégrale comme ci-dessus, et la seconde en écrivant :

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} - \frac{z}{z_0{}^2} - \dots \qquad - \frac{z^n}{z_0{}^{n+1}} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+1} \frac{1}{z - z_0}$$

et l'on achève de même; la formule obtenue est la *formule de Laurent*, de la forme :

$$f(z_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z_0^n .$$



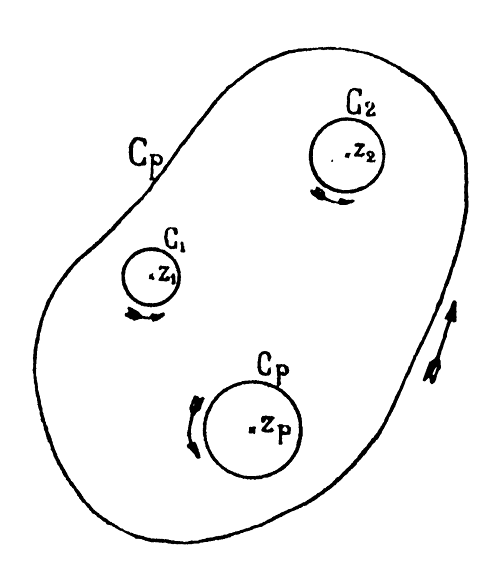
En un point z'_0 (remplaçant l'origine O), on trouverait :

$$f(z_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n (z_0 - z'_0)^n .$$

Résidus — Supposons $f(z)$ régulier dans C , sauf en certains points *isolés* z_1 , z_2 , ... z_p .

On pourra écrire :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \dots \quad + \int_{c_p} f(z)\,dz .$$



Mais dans C , autour du point c_1 , on peut développer $f(z)$ suivant la formule de Laurent ci-dessus; donc sur c_1 on a :

$$\begin{cases} f(z) = A_0 + A_1(z - z_1) + A_2(z - z_1)^2 + \dots \\ \qquad + \dfrac{B_1}{z - z_1} + \dfrac{B_2}{(z - z_1)^2} + \dots \end{cases}$$

Il est manifeste que dans l'intégration tous les termes donneront zéro, sauf le terme en $\dfrac{1}{z - z_1}$; on aura :

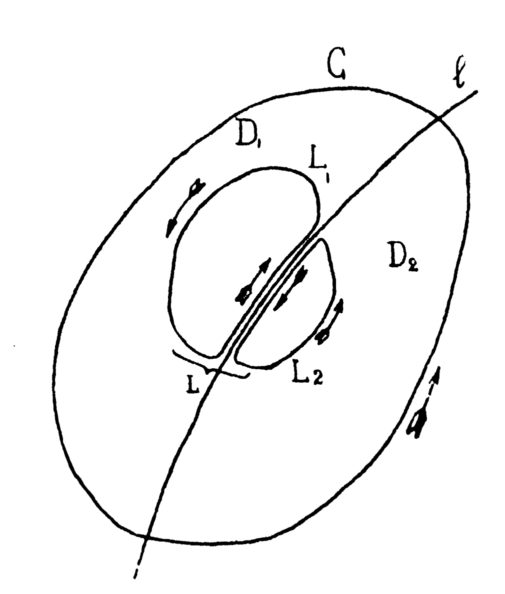
$$\int_{c_1} f(z)\,dz = B_1 \int_{c_1} \frac{dz}{z - z_1} = 2i\pi\, B_1$$

B_1 est le *résidu* de la fonction $f(z)$ au point z_1 , et l'on aura enfin la formule (de Cauchy) :

$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \times \sum$ Résidus aux divers points singuliers intérieurs à C .

Prolongement analytique d'une fonction. — Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions analytiques régulières respectivement dans deux domaines contigus simplement connexes D_1 et D_2 , séparés par une ligne-frontière l le long de laquelle on ait $f_1(z) = f_2(z)$.

Dans ces conditions, je dis que la fonction $f(z)$, égale à f_1 ou f_2, suivant que z est dans D_1 ou dans D_2 , est *une* fonction analy-

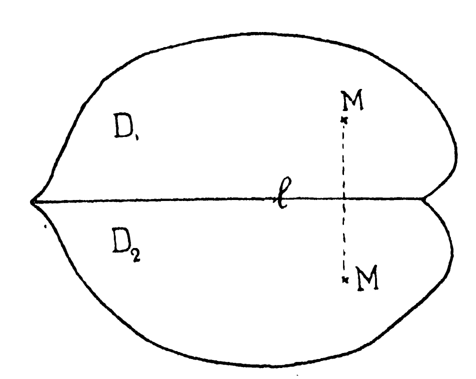


tique régulière dans le domaine total $D = D_1 + D_2$. Il suffit de vérifier, à cet effet, que pour toute courbe fermée L comprise dans D , on a $\int_L f(z)\,dz = 0$; le seul cas où il y ait lieu à démonstration est celui de la figure, où L empiète sur les deux domaines, et le résultat est évident d'après le dessin lui-même, en remplaçant

l'intégrale sur L par les intégrales sur L_1 et L_2 (comportant chacune une portion de l parcourue dans un sens ou dans l'autre.

On dit alors que f_2 est le *prolongement analytique* de f_1 dans la région D_2

Principe de Schwartz. — Par exemple, supposons que la ligne l soit une *droite*, le long de laquelle $f_1(z)$, définie dans D_1 , *prenne*



des valeurs réelles. Il suffira de prendre pour $f_2(z)$ une fonction dont la valeur en chaque point M soit imaginaire conjuguée de celle que prend $f_1(z)$ au point M symétrique par rapport à l . On sera alors dans les conditions de la définition ci-dessus. On aura ainsi réalisé le prolongement analytique dans le domaine D_2 symétrique de D_1 par rapport à l . Ce résultat porte le nom de principe de Schwartz.

CHAPITRE II

FORMULE RÉSOLVANT LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN CERCLE OU DANS UN ANNEAU

Nous placerons dans ce chapitre la solution de deux problèmes dont les résultats nous serons constamment utiles dans tout le présent volume.

Il s'agit actuellement de déterminer une fonction analytique — si elle existe — régulière dans un cercle, ou dans un anneau circulaire, et dont la *partie réelle* prenne sur la (ou les) frontières, des successions de valeurs assignées d'avance. Ceci est un problème de Dirichlet un peu généralisé.

Cas du cercle. — La fonction $f(z)$ cherchée sera, dans ce cas, développable *dans* le cercle par la formule de Taylor, de la forme :

(5) $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad + a_n z^n + \dots$$

La série étant convergente *dans* le cercle même, mais pouvant avoir des singularités à la frontière, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que le rayon du cercle est égal à *un*. Puis, sans nous préoccuper provisoirement de la légitimité des opérations que nous allons développer, faisons, dans (5), $z = e^{i\theta}$, posons, en outre, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n et β_n étant réels; il vient :

$$f(e^{i\theta}) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) + i\left\{\beta_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta\right\}.$$

Soit $\Phi(\theta)$ la fonction donnée, nécessairement périodique avec la période 2π, à laquelle doit se réduire, sur la circonférence C,

la partie réelle de $f(z)$. Cela impose évidemment qu'on ait, quelque soit θ,

$$\Phi(\theta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta).$$

Admettons que $\Phi(\theta)$ soit développable en série trigonométrique; on en conclura, par des opérations élémentaires bien connues :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \\ \beta_n &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \sin n\theta\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

D'où nous tirons :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta + i\beta_0 ; \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta .$$

Portant dans (5), il vient :

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \left(\sum_1^{\infty} z^n e^{-in\theta}\right) d\theta$$

Mais puisque $|z| < 1$ dans le cercle, on a :

$$\sum_1^{\infty} z^n e^{-in\theta} = \frac{z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}}$$

D'où, enfin :

$$(6) \qquad \boxed{f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}}\, d\theta}$$

La fonction $f(z)$ est ainsi définie, à une constante, imaginaire pure, près.

Une fois la formule écrite, il n'est pas extrêmement difficile de se débarrasser des hypothèses faites en chemin, et de légitimer cette formule *a posteriori*. On peut faire voir (Cf. par exemple, *Sur le problème de Dirichlet dans une aire circulaire*, Bulletin de la Société Mathématique, 1911) que la fonction donnée par (6) résoud le problème d'une façon extrêmement générale

Cas particulier. — Supposons que la fonction donnée $\Phi(\theta)$ prenne les mêmes valeurs aux points symétriques par rapport à l'axe réel, autrement dit que $\Phi(2\pi - \theta) = \Phi(\theta)$ Alors, en négligeant la constante arbitraire, on voit que la fonction

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \left[\frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} + \frac{1 + z e^{i\theta}}{1 - z e^{i\theta}} \right] d\theta \ ,$$

c'est-à-dire :

$$(7) \qquad f_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2} d\theta$$

satisfait au problème posé.

Cette formule (7) rappelle de très près la formule de Poisson, dont on peut montrer comme il suit le lien étroit avec celle-ci.

Si d'abord dans la formule (6) nous posons, pour un point intérieur au cercle $z = re^{it}$, nous trouvons de suite que la partie réelle de $f(z)$ peut s'écrire :

$$(7') \qquad \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2} d\theta \ ,$$

et la formule ainsi obtenue ne diffère pas de celle de Poisson.

Supposons inversement cette dernière formule connue, plaçons-nous dans le cas où l'on a $\Phi(2\pi - \theta) = \Phi(\theta)$, et supposons que la fonction analytique $f(z)$ cherchée soit réelle sur l'axe réel (il est facile de voir qu'il suffit de choisir à cet effet convenablement la constante arbitraire β_0 ; alors $f(z)$ sera une série de Taylor à coefficients réels, et prendra des valeurs conjuguées aux points conjugués, que nous noterons $z = x + iy$ et $z_0 = x - iy$; c'est-à-dire qu'on aura :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$
$$f(z_0) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y),$$

d'où :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(z) + f(z_0)\right] = \varphi\left[\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right].$$

La dernière égalité est une identité par rapport aux lettres z et z_0 considérées comme variables.

On prévoit donc qu'on aura, en égalant ces deux variables :

$$f(z) = \varphi(z, o) \ .$$

Cela s'écrit sans peine :

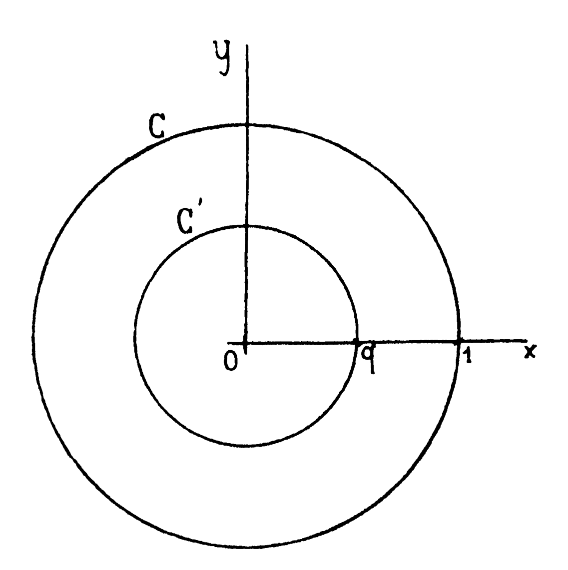
$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2} d\theta ,$$

et, dans le cas actuel :

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2} d\theta ,$$

ce qui montre bien le parallélisme des deux formules.

Problème de l'anneau. — Nous allons maintenant nous poser le même problème que plus haut pour un domaine annulaire, enfermé entre deux circonférences concentriques dont nous pourrons, sans diminuer la généralité, supposer les rayons égaux à 1 et à q $(q < 1)$.



Aux points $e^{i\theta}$ et $q\,e^{i\theta}$ des deux frontières C et C' , la partie réelle de la fonction analytique $f(z)$ cherchée devra prendre les valeurs $\Phi(\theta)$ ou $\Psi(\theta)$ supposées données. [Il est clair que Φ et Ψ sont périodiques avec la période 2π].

Dans le domaine annulaire, la fonction $f(z)$, régulière, sera développable en série de Laurent, de la forme :

$$f(z) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n z^n + \sum_1^{\infty} b_n \frac{1}{z^n} .$$

Posons

$$a_0 = \alpha_0 + i\beta_0 , \qquad a_n = \alpha_n + i\beta_n , \qquad b_n = \gamma_n + i\delta_n$$

les lettres grecques désignant des nombres réels ; plaçons-nous, en

outre, sur la frontière extérieure C , et faisons $z = e^{i\theta}$. L'égalité à $\Phi(\theta)$ de la partie réelle de $f(z)$ donne alors :

$$\Phi(\theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty [(\alpha_n + \gamma_n) \cos n\theta - (\beta_n - \delta_n) \sin n\theta]$$

En admettant, provisoirement, que $\Phi(\theta)$ soit développable en série trigonométrique, nous en déduisons :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta , \\ \alpha_n + \gamma_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \cos n\theta\, d\theta , \\ -\beta_n + \delta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \sin n\theta\, d\theta . \end{aligned} \right.$$

Opérant de même sur la circonférence intérieure, où $z = q\, e^{i\theta}$ nous devons avoir :

$$\Psi(\theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty [(\alpha_n q^n + \gamma_n q^{-n}) \cos n\theta - (\beta_n q^n - \delta_n q^{-n}) \sin n\theta]$$

Et, supposant encore $\Psi(\theta)$ développable en série trigonométrique, il vient :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\, d\theta , \\ \alpha_n q^n + \gamma_n q^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \cos n\theta\, d\theta \\ -\beta_n q^n + \delta_n q^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \sin n\theta\, d\theta \end{aligned} \right.$$

De l'ensemble des formules (8) et (9) nous tirerons α_0 , puis tous les α_n , β_n , γ_n , δ_n pour $n \neq 0$. On en déduira donc tous les coefficients a_n et b_n $(n \neq 0)$, et a_0 restera indéterminé quant à sa partie imaginaire $i\beta_0$, ce qui était du reste à prévoir.

Nous constatons qu'on trouve pour α_0 deux expressions distinctes; l'égalité de ces deux expressions donne la *condition d'uniformité* nécessaire pour que le problème soit possible.

$$(10) \quad \boxed{\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\, d\theta}$$

Un calcul aisé donne ensuite :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta + i\beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\, d\theta + i\beta_0 ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(1-q^{2n})}\left\{\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta\right\}$$

$$b_n = \frac{q^n}{\pi(1-q^{2n})}\left\{- q^n \int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta\right\}$$

Transportant dans $f(z)$ nous parvenons à la formule suivante :

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,.\,S\,.\,d\theta \\ - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\,.\,T\,.\,d\theta\,. \end{aligned} \right.$$

avec

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}}{1-q^{2n}} ; \qquad T = \sum_1^{\infty} \frac{q^n (z^n e^{-in\theta} - z^{-n} e^{in\theta})}{1-q^{2n}}$$

Ces expressions sont très appropriées aux calculs numériques approchés, mais on peut les simplifier extrêmement par l'introduction des *fonctions elliptiques*. C'est ce que nous allons faire ci-dessous, par une méthode très simple et naturelle qui nous fournira en même temps une théorie abrégée de ces fonctions elliptiques, en ce qui concerne toutes les propriétés de ces fonctions dont nous aurons besoin.

Commençons par transformer S et T en utilisant la formule évidente :

$$(1-q^{2n})^{-1} = 1 + q^{2n} + q^{4n} + \dots \qquad + q^{2np} \dots$$

Il viendra de suite :

$$S = \sum_n (z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}) + \sum_n \sum_p (z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta})\, q^{2np} ,$$

c'est-à-dire immédiatement :

$$S = \frac{z\, e^{-i\theta}}{1 - z\, e^{-i\theta}} - \frac{q^2 z^{-1} e^{i\theta}}{1 - q^2 z^{-1} e^{i\theta}}$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{q^{2p} z\, e^{-i\theta}}{1 - q^{2p} z\, e^{-i\theta}} - \frac{q^{2p+2} z^{-1} e^{i\theta}}{1 - q^{2p+2} z^{-1} e^{i\theta}} \right\}$$

Or, ceci peut manifestement s'écrire :

(12) $$S = -z \frac{d}{dz} \log \prod_1^\infty (1 - q^{2n-2} z e^{-i\theta}) (1 - q^{2n} z^{-1} e^{i\theta}).$$

Et l'on trouve, par un calcul tout semblable,

(13) $$T = -z \frac{d}{dz} \log \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1} z e^{-i\theta}) (1 - q^{2n-1} z^{-1} e^{i\theta}) .$$

Visiblement S et T s'expriment l'un et l'autre (par un changement de variable évident en ce qui concerne T) en fonction de l'unique expression :

(14) $$L = \prod_1^\infty (1 - q^{2n-2} z e^{-i\theta}) (1 - q^{2n} z^{-1} e^{i\theta}) .$$

C'est ici que s'introduiront d'elles-mêmes les fonctions elliptiques.

Les fonctions $\sigma_3 u$ **et** σu . — Appelons ω_1 et ω_3 deux nombres qui, pour le moment, seront respectivement, ω_1 réel, et ω_3 imaginaire pure $\left(\omega_1 > 0, \frac{1}{i} \omega_3 > 0\right)$ et tels que l'on ait :

(15) $$q = e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}} = e^{\pi\tau i} \qquad \text{en posant} \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Ces nombres ω_1 et ω_3 porteront le nom de *demi-périodes*. Posons encore $t = e^{i\pi v}$, $v = \frac{u}{2\omega_1}$; η_1 étant une constante qui sera précisée plus loin, nous définirons deux fonctions par les formules suivantes, où les produits infinis sont manifestement convergents.

(16) $$\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n-1} t^2)(1 - q^{2n-1} t^{-2})}{(1 - q^{2n-1})^2}$$

(17) $$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{t - t^{-1}}{2i} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n} t^2)(1 - q^{2n} t^{-2})}{(1 - q^{2n})^2}$$

Un simple coup d'œil permet de voir que L s'exprime aisément au moyen de σ_3 . Mais avant de faire ce calcul nous tirerons des définitions (16) et (17) quelques propriétés évidentes, qui montreront dans quel but on a fait figurer aux seconds membres les facteurs précédant les produits infinis.

On a d'abord :

$$\sigma_3(o) = 1 \ , \qquad \sigma(o) = 0$$

Cherchons à développer σu par rapport à u. Il est clair qu'on pourra écrire :

$$(17') \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma u = & \frac{2\,\omega_1}{\pi}\left(\frac{\pi\, u}{2\,\omega_1} - \frac{\pi^3\, u^3}{6\,.\,8\,.\,\omega_1^3} + \ldots\right) \\ & \left(1 + \frac{\eta_1\, u^2}{2\,\omega_1} + \frac{\eta_1^2\, u^4}{8\,\omega_1^2} + \ldots\right) \\ & \Pi \left\{ \frac{(1 - q^{2n})^2 + q^{2n}\,\dfrac{\pi^2\, u^2}{\omega_1^2} + \ldots}{(1 - q^{2n})^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

Le dernier produit infini peut s'écrire

$$1 + \frac{\pi^2\, u^2}{\omega_1^2}\, \Sigma \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} + \ldots$$

De sorte que σu apparaît maintenant comme une fonction impaire entière en u, dont le premier terme est u. Le terme suivant, en u^3, a pour coefficient :

$$- \frac{\pi^2}{24\,\omega_1^2} + \frac{\eta_1}{2\,\omega_1} + \frac{\pi^2}{\omega_1^2}\, \Sigma \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2}$$

Nous choisirons η_1 *de façon à ce que ce coefficient soit nul,* de telle sorte que nous aurons la relation :

$$2\,\eta_1\,\omega_1 = \pi^2 \left[\frac{1}{6} - \Sigma \frac{4\,q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2}\right]$$

qui définira η_1. Et le développement de σu sera de la forme :

$$(17'') \qquad \sigma u = u + A\,u^5 + B\,u^7 + \ldots$$

Formons maintenant l'expression $\sigma_3(u + 2\,\omega_1)$, en observant que la transformation $u \mid u + 2\,\omega_1$ donne les substitutions correspondantes $v \mid v + 1$, $t \mid -t$, il vient :

$$\sigma_3(u + 2\,\omega_1) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\, e^{2\eta_1 u + 2\eta_1\omega_1} \prod_1^\infty \frac{(1 - q^{2n-1}\, t^2)(1 - q^{2n-1}\, t^{-2})}{(1 - q^{2n-1})^2}$$

On a donc :

(18) $$\boxed{\sigma_3 (u + 2\,\omega_1) = e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma_3\, u}$$

Faisons de même les substitutions simultanées $u \mid u + 2\,\omega_3$ $v \mid v + \tau$, $t \mid qt$; nous obtiendrons :

$$\sigma_3 (u + 2\,\omega_3) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2 + 4\eta_1\omega_1 v\tau + 2\eta_1\omega_1\tau^2}$$
$$\frac{\left[1 - q^3\, t^{-2})\,(1 - q^5\, t^2)\,\ldots\,\left(1 - \frac{1}{q}\,t^{-2}\right)(1 - q t^{-2})\,(1 - q^3\, t^{-2}\,\ldots\right]}{\pi\,(1 - q^{2n-1})^2}$$

Or le crochet du second nombre est égal à

$$\frac{1 - \frac{1}{q}\,t^{-2}}{1 - q\,t^2}\;\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}\,t^2)\,(\,1 - q^{2n-1}\,t^{-2})$$

De là on tire aisément :

$$\sigma_3 (u + 2\,\omega_3) = -\,\sigma_3\, u\;\frac{e^{4\eta_1\omega_1 v\tau + 2\eta_1\omega_1\tau^2}}{e^{\tau\pi i}\;e^{2i\pi v}}\,.$$

Définissons maintenant un nombre η_3 par la relation :

(19) $$\eta_1\,\omega_3 - \eta_3\,\omega_1 = \frac{i\,\pi}{2}\,.$$

Un calcul élémentaire nous donnera :

(20) $$\boxed{\sigma_3 (u + 2\,\omega_3) = -\,e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\,\sigma_3\, u}$$

Un calcul tout semblable effectué sur σu nous conduira de même aux deux formules :

(21) $$\boxed{\begin{aligned}\sigma (u + 2\,\omega_1) &= -\,e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma\, u\\ \sigma (u + 2\,\omega_3) &= -\,e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\,\sigma\, u\end{aligned}}$$

Relions encore $\sigma_3\, u$ et σu par une formule importante. A cet

effet, cherchons à former $\sigma_3(u-\omega_3)$; les substitutions $u \mid u-\omega_3$, $v \mid v-\frac{\tau}{2}$, $t \mid t q^{-\frac{1}{2}}$, donnent :

$$\sigma_3(u-\omega_3) =$$
$$\frac{e^{2\eta_1\omega_1\left(v^2-v\tau+\frac{\tau^2}{4}\right)}}{\Pi(1-q^{2n-1})^2}\left[(1-t^2)(1-q^2t^2)\ldots\quad(1-q^2t^{-2})(1-q^4t^{-2})\ldots\right].$$

Le crochet reproduit le produit infini qui figure dans σu, avec le facteur supplémentaire $1-t^2 = \frac{1}{t}(t-t^{-1})$ On en conclut aussitôt :

$$\sigma_3(u-\omega_3) = e^{-\eta_3 u}\,\sigma u\left[-\frac{i\pi}{\omega_1}\,\frac{\Pi(1-q^{2n})^2}{\Pi(1-q^{2n-1})^2}\,e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}\right]$$

Le crochet représente une certaine constante C, à laquelle on peut donner une expression plus condensée ; de la formule

$$\sigma_3(u-\omega_3) = C\,e^{-\eta_3 u}\,\sigma u$$

nous tirerons, en effet, en y faisant $u=\omega_3$,

$$1 = C\,e^{-\eta_3\omega_3}\,\sigma\omega_3\,.$$

De sorte que, finalement, nous aurons :

(22) $$\boxed{\sigma_3(u-\omega_3) = \frac{e^{-\eta_3(u-\omega_3)}}{\sigma\omega_3}\,\sigma u}$$

Les fonctions $\zeta_3 u$ **et** ζu. — On a l'habitude de désigner par ζ_3 et ζu les dérivées logarithmiques de $\sigma_3 u$ et σu

(23) $$\zeta_3 u = \frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u}\,,\qquad \zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}\,.$$

Les formules (14), (16), (17) et (18), dérivées logarithmiquement, nous donneront immédiatement les propriétés suivantes :

(24) $$\begin{cases}\zeta_3(u+2\omega_1) = \zeta_3 u + 2\eta_1\,, & \zeta_3(u+2\omega_3) = \zeta_3 u + 2\eta_3\\ \zeta(u+2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1\,, & \zeta(u+2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3\end{cases}$$

(25) $$\zeta_3(u-\omega_3) = \zeta u - \eta_3\,.$$

Expressions de L, S, T. — Ceci étant, revenons à notre fonction L définie par (14). Il est tout à fait clair que L coïncide avec $\sigma_3 u$, au facteur exponentiel près, si nous faisons :

$$z\, q^{-1}\, e^{-i\theta} = t^2 \quad \text{, et par suite :}$$

$$u = 2\omega_1 v = \frac{2\omega_1}{i\pi} \log t = \frac{\omega_1}{i\pi} (\log z - i\theta - \log q)$$
$$= \frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta - \omega_3 .$$

Nous aurons donc :

$$(26) \quad \mathrm{L} = \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta - \omega_3 \right) e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta - \omega_3\right)^2} \Pi (1 - q^{2n-1})^2$$

Et, par suite, d'après (12) :

$$\mathrm{S} = -z \frac{d \log \mathrm{L}}{dz} = -\frac{\omega_1}{i\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta - \omega_3 \right)$$
$$- \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log z + \frac{i \eta_1 \omega_1}{\pi^2} \theta + \frac{i \eta_1 \omega_3}{\pi} .$$

Simplifions, en utilisant la formule (25), puis transformons le terme constant au moyen de l'égalité (19), il vient :

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S} &= -\frac{\omega_1}{i\pi} \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \\ &- \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log z + \frac{i \eta_1 \omega_1}{\pi^2} \theta - \frac{1}{2} . \end{aligned} \right.$$

On aura de la même façon :

$$\mathrm{T} = -z \frac{d}{dz} \log \mathrm{L}_1 \quad \text{, avec} \quad \mathrm{L}_1 = \mathrm{L}(q z) \quad \text{, c'est-à-dire, d'après (22) :}$$

$$\mathrm{L}_1 = \Pi (1 - q^{2n-1})^2\, e^{\frac{\eta_1 \omega_1}{2\pi^2}(\log z - i\theta)^2}\, \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right)$$

D'où enfin :

$$(28) \quad \mathrm{T} = -\frac{\omega_1}{i\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) - \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log z + \frac{i \eta_1 \omega_1}{\pi^2} \theta$$

Portons les expressions (27) et (28) de S et T dans la formule

(11); le terme en $\left(-\frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log z\right)$ et $\left(\frac{i \eta_1 \omega_1}{\pi^2} \theta\right)$ disparaîtront à cause de la condition (10), et il viendra :

$$
(29) \quad \begin{aligned}
f(z) = i \beta_0 &+ \frac{i \omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta\right) d\theta \\
&- \frac{i \omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta\right) d\theta
\end{aligned}
$$

Cette formule fondamentale une fois obtenue (Cf H. Villat, *Sur le problème de Dirichlet dans une aire circulaire*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912), il est possible de la légitimer *a posteriori*, et de la rendre indépendante des hypothèses que nous avons admises dans le courant des calculs précédents. Je renverrai le lecteur à mon Mémoire pour cette vérification détaillée.

Dans le Chapitre suivant nous ouvrirons une parenthèse en vue de développer quelques propriétés des fonctions elliptiques et des fonctions qui s'y rattachent, dont les éléments viennent d'être donnés dans les lignes qui précèdent.

CHAPITRE III

DIGRESSION SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Dans le Chapitre précédent, nous avons été amené à introduire deux nombres ω_1 et ω_3 (demi-périodes), nous avons posé $q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}$; puis deux constantes η_1 et η_3 ont été définies par les relations :

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\,\eta_1\,\omega_1 &= \pi^2 \left[\frac{1}{6} - \sum_1^\infty \frac{4\,q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \right] \\ \eta_1\,\omega_3 - \eta_3\,\omega_1 &= \frac{i\,\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

Enfin, il en est résulté, par les formules (16), (17), (23), la définition des fonctions $\sigma_3 u$, σu, $\zeta_3 u$, ζu. Avant de développer plus avant la propriété de ces fonctions et de plusieurs autres qui s'y rattachent aisément, nous observerons que l'hypothèse faite au début, relativement à la réalité de ω_1 et de $\frac{\omega_3}{i}$, est tout à fait inutile pour la suite des définitions et des raisonnements, faits ou à faire. Cette hypothèse n'est nécessaire pour l'application qu'à cause du sens géométrique de la quantité q (rayon de notre circonférence C'); mais toute une théorie des fonctions elliptiques peut être obtenue par les mêmes formules que ci-dessus, en supposant seulement que les deux constantes ω_1 et ω_3 ont leur rapport imaginaire, et plus précisément, que si l'on pose $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau = a + i\,b$, le coefficient b est *positif* (on verra, dans un instant, la raison de ce signe, et à quoi il correspond).

On convient d'appeler *parallélogramme des périodes*, un parallélo-

gramme construit dans le plan de la variable u, avec les deux vecteurs $2\omega_1$, $2\omega_3$; le plus simple est celui dont un sommet serait à l'origine; en marquant dans le plan tous les points d'affixes $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ (m et n : entiers, positifs, négatifs ou nuls) on obtient le sommet d'un réseau formant une infinité de parallélogrammes des périodes. Ces points sont appelés les *points-périodes*.

Fonction σu. — Si l'on se reporte à la définition et aux développements antérieurs, nous savons que σu est une fonction entière, vérifiant les équations :

$$(31) \qquad \sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\,\sigma u \quad , \quad \sigma(u + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\,\sigma u \,.$$

Le produit infini qui figure dans la formule (17) des précédents chapitres, nous montre que σu s'annule pour (et seulement pour) $t = \pm 1$, $t = \pm q^n$, c'est-à-dire pour $u = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, c'est-à-dire que *les zéros de* σu *sont les points-périodes*. Ce sont tous des *zéros simples*.

Fonction ζu. — On sait que le développement de σu est de la forme :

$$\sigma u = u + A u^5 + \dots$$

On aura donc :

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1 + 5 A u^4 + \dots}{u + A u^5 + \dots}$$

Au voisinage de $u = 0$, le développement de ζu sera donc de la forme :

$$\zeta u = \frac{1}{u} + 4 A u^3 + \dots$$

ζu est donc une fonction *impaire* admettant $u = 0$ pour *pôle simple* avec le résidu 1.

Les formules :

$$(32) \qquad \zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1 \quad , \quad \zeta(u + 2\omega_3) = \zeta u + 2\eta_3$$

déjà démontrées, prouvent que tous les points-périodes sont également des pôles de même résidu.

Ces mêmes formules, dans lesquelles on fait $u = -\omega_1$ ou $-\omega_3$,

en se rappelant que ζu est impaire, donnent imméditement :

(33) $$\eta_1 = \zeta \omega_1 \quad , \quad \eta_3 = \zeta \omega_3 \quad .$$

Remarque. — Il est intéressant de noter ce que donnent précisément ces formules (4) lorsqu'on fait usage de la définition même de σu, et de ce qui en résulte pour ζu, on a :

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \Pi \frac{\left(1 - q^{2n} e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-i\pi\frac{u}{\omega_1}}\right)}{(1 - q^{2n})^2} .$$

Donc :

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{Cotg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{\eta_1 u}{\omega_1}$$
$$- \frac{i\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \left(\frac{q^{2n} e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}}{1 - q^{2n} e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}} - \frac{q^{2n} e^{-i\pi\frac{u}{\pi_1}}}{1 - q^{2n} e^{-i\pi\frac{u}{\omega_1}}} \right)$$

Pour $u = \omega_1$, $e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}}$ devient égal à -1 et l'on trouve l'identité $\eta_1 = \eta_1$; pour $u = \omega_3$, on a :

$$\operatorname{Cotg} \frac{\pi\omega_3}{2\omega_1} = i \frac{q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = i \frac{q+1}{q-1} \quad \text{, puisque} \quad e^{\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}} = q$$

Donc il vient :

(34) $$\left\{ \begin{aligned} \eta_3 &= \frac{\pi}{2\omega_1} i \frac{q+1}{q-1} + \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \\ &- \frac{i\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \left(\frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} - \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}} \right) \end{aligned} \right.$$

Dans la somme Σ, tous les termes disparaissent, sauf un, et il reste la formule qui définissait primitivement η_3 :

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2} \left(\frac{1+q}{1-q} - \frac{2q}{1-q} \right) = \frac{i\pi}{2} .$$

Du moins les choses se passent ainsi, avec évidence, si q est réel et plus petit qne 1. Si nous nous plaçons dans le cas général

où ω_1 et ω_3 sont quelconques avec $\frac{\omega_3}{\omega_1} = a + ib \; (b > 0)$, nous voyons que le résultat subsiste, car la somme des n premiers termes de la somme Σ est $\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} - \frac{q}{1-q}$, dans laquelle $q = e^{-\frac{\pi}{i}(a+ib)} = e^{-\pi b} e^{ia\pi}$, on a donc $|q| = e^{-\pi b} < 1$, et l'expression écrite tend vers $\frac{-q}{1-q}$ pour n infini. Au contraire, si l'on avait supposé $b > 0$, $|q|$ étant supérieur à 1, la même expression tendrait vers la limite $-1 - \frac{q}{1-q}$; dans ce cas, la formule (34) exigerait qu'on eût $\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = -\frac{i\pi}{2}$. On voit donc nettement ici l'importance donnée au signe de $\mathcal{R}\frac{\omega_3}{i\,\omega_1}$.

Fonction pu. — Nous poserons par définition :

$$pu = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} - 12\,A\,u^2 + \ldots$$

le dernier développement concernant le voisinage du point $u = 0$. Ce point est donc un *pôle double* de pu, avec un résidu *nul*.

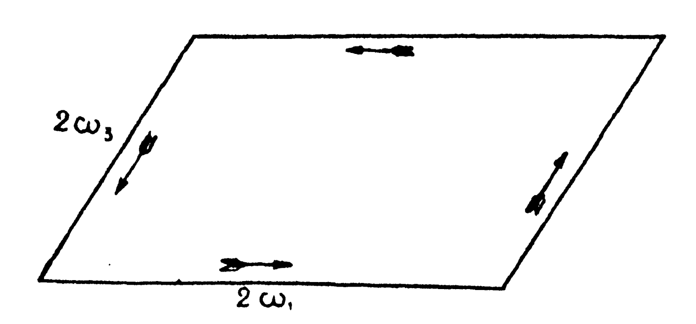
Des formules (32) on tire de suite par dérivation :

$$(35) \qquad p(u + 2\omega_1) = pu \quad , \quad p(u + 2\omega_3) = pu \, .$$

La fonction pu *admet donc les deux périodes* $2\omega_1$, $2\omega_3$; c'est une fonction *uniforme doublement périodique* ou *fonction elliptique*, qui possède, par suite, pour pôles (doubles) tous les points-périodes; la partie principale est $\frac{1}{u^2}$ pour le pôle $u = 0$; il n'y a pas d'autres points singuliers que ces points-périodes.

Un théorème général sur les fonctions elliptiques. — Envisageons un parallélogramme des périodes, construit au moyen des deux vecteurs $2\omega_1$, $2\omega_3$, et formons l'intégrale $\int F(u)\,du$, $F(u)$ étant une fonction elliptique, c'est-à-dire une fonction uniforme, ne possédant, à distance finie, d'autres singularités que des pôles, et l'intégrale étant étendue aux côtés du parallélogramme. A cause de la double périodicité de $F(u)$, il est évident que la valeur de

cette expression est *nulle*. Mais, d'autre part, si nous appliquons à la même intégrale le théorème de Cauchy concernant les résidus, elle est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des points singuliers intérieurs au parallélogramme. *La somme de ces résidus est donc nulle.*



Si nous appliquons ce résultat à la fonction elliptique $\dfrac{F'(u)}{F(u)}$, nous voyons de suite que : le nombre des zéros d'une fonction elliptique $F(u)$ dans un parallélogramme des périodes, est égal au nombre des pôles situés dans le même parallélogramme ; chacun des zéros ou des pôles étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Ce nombre total est appelé *l'ordre* de la fonction elliptique. Ainsi la fonction pu est d'ordre 2.

Les dérivées de pu. — La dérivée $p'u$, et toutes les dérivées suivantes, sont évidemment des fonctions elliptiques et, alternativement, impaires et paires.

On a, notamment :

$$p'(u + 2\omega_1) = p'u$$

Pour $u = -\omega_1$, ceci donne :

$$p'(\omega_1) = p'(-\omega_1) = -p'(\omega_1).$$

Donc, $p'\omega_1$ étant fini, en vertu d'un raisonnement des plus élémentaires, nous en concluons :

$$p'\omega_1 = 0.$$

Et, de même, on aura :

$$p'\omega_3 = 0 \quad \text{et aussi} \quad p'(\omega_1 + \omega_3) = 0$$

Donc

$$\omega_1, \quad \omega_3, \quad \omega_1 + \omega_3 \quad \textit{sont des zéros de} \quad p'u.$$

Ce sont des *zéros simples*, car $p' u$ est une fonction de troisième ordre (n'ayant qu'un pôle, triple, dans un parallélogramme des périodes; ce pôle est le point-période intérieur au parallélogramme) et il ne saurait avoir plus de trois zéros simples distincts dans un tel parallélogramme.

L'équation différentielle de $p u$

Des relations :

$$p u = \frac{1}{u^2} + \alpha u^2 + \dots$$

$$p' u = - \frac{2}{u^3} + 2 \alpha u + \dots$$

dans lesquelles les termes non écrits représentent des séries entières (paire ou impaire respectivement) contenant soit u^4, soit u^3 en facteur, on tire immédiatement que la combinaison :

$$p u^2 - 4 p^3 u + 20 \alpha p u$$

est une série entière en u. C'est donc une fonction entière *qui reste finie dans tout le plan* puisqu'elle reste finie dans un parallélogramme de période, le seul pôle possible (point-période) ayant disparu dans la construction même. Donc, d'après le théorème de Liouville, cette expression est une *constante*.

Il existe donc deux nombres constants qu'on a l'habitude de désigner par g_2 et g_3, tels que la fonction $p u$ vérifie l'identité.

(36) $$\boxed{p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p u - g_3}$$

Mais on sait que $p' u$ s'annule pour $u = \omega_1$, ω_3, $\omega_1 + \omega_3$. Posons, suivant la coutume :

$$e_1 = p \omega_1 \qquad e_3 = p \omega_3 \qquad e_2 = p (\omega_1 + \omega_3)$$

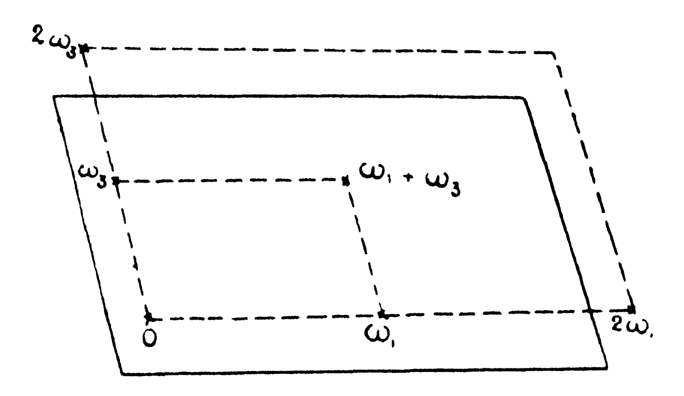
Les trois nombres e_1, e_2, e_3, sont *distincts*, car si l'on avait, par exemple, $e_1 = e_2$, l'équation $p u - e_1 = 0$ aurait *deux* racines *doubles* ($u = \omega_1$ et $u = \omega_1 + \omega_3$) dans le parallélogramme des périodes qu'indique la *figure* en trait plein ; or la fonction $p u - e_1$,

comme pu, est seulement d'ordre 2, elle n'a qu'un pôle (double), $u=0$ dans ce parallélogramme.

De là résulte que la formule (36) peut aussi recevoir la forme suivante :

(37) $$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)$$

Dans le cas particulier, à beaucoup près le plus important, à telles enseignes qu'on l'appelle le *cas normal*, où ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont réels et positifs, tous les coefficients de pu (déduits de l'expression



(13′) seront réels et, par suite, pu étant paire, les deux nombres e_1 et e_3 seront des nombre réels. D'autre part, en identifiant (36) et (37), il est clair qu'on a :

(38) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

e_2 sera donc, dans ce cas, également réel.

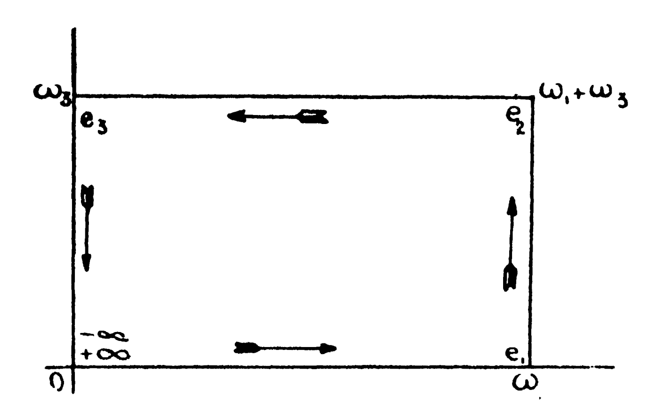
Il est facile de voir que, dans ce même cas, on a $e_1 > e_2 > e_3$. Car si u varie, en restant réel, de 0 à ω_1, $p'u$ est réel, continu, et ne change pas de signe puisqu'on ne rencontre dans l'intervalle ni un pôle ni un zéro de $p'u$. Donc $p'u$ reste négatif comme il l'est au départ où la partie principale était $-\frac{2}{u^3}$. C'est dire que pu décroît dans ces conditions de $+\infty$ à $e_1 = p\omega_1$, sans que l'on rencontre chemin faisant de zéro de $p'u$, c'est-à-dire sans que pu prenne les valeurs e_2 et e_3. Donc e_1 est bien la plus grande des trois racines du second nombre de (37). Pour une raison analogue, en faisant varier u de 0 à ω_3, en restant purement imaginaire, on constate que e_3 est la plus petite racine.

ou, à cause de (33), la première des trois formules suivantes :

$$(43)\quad \begin{cases} p(u+\omega_1) = e_1 + \dfrac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p\,u - e_1} ; \\ p(u+\omega_3) = e_3 + \dfrac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{p\,u - e_3} ; \\ p(u+\omega_1+\omega_3) = e_2 + \dfrac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p\,u - e_2} ; \end{cases}$$

dont les deux dernières se démontrent d'une façon semblable.

Dans le cas normal $\left(\omega_1 \text{ et } \dfrac{\omega_3}{i} \text{ réels et positifs}\right)$ ces formules (43) montrent immédiatement que $p\,u$ varie, en restant réel, et en décroissant constamment, de $+\infty$ à $-\infty$, et en passant par les valeurs e_1, e_2, e_3, lorsque u décrit dans le sens positif le



contour du rectangle 0, ω_1, $\omega_1+\omega_3$, ω_3, 0, de la *figure*.

Revenons au cas général. Dans (39) faisons $v = \omega_1$, il vient :

$$p\,u - e_1 = -\frac{\sigma(u+\omega_1)(u-\omega_1)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_1}.$$

Mais, d'après (21) on a :

$$\sigma(u+\omega_1) = -e^{2\eta_1 u}\,\sigma(u-\omega_1).$$

Donc on a la première des trois formules suivantes, qui se démontrent naturellement de même :

$$(44)\quad \begin{cases} p\,u - e_1 = e^{2\eta_1 u}\dfrac{\sigma^2(u-\omega_1)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega_1} ; \\ p\,u - e_3 = e^{2\eta_3 u}\dfrac{\sigma^2(u-\omega_3)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega_3} ; \\ p\,u - e_2 = e^{2(\eta_1+\eta_3)u}\dfrac{\sigma^2(u-\omega_1-\omega_3)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(\omega_1+\omega_3)} \end{cases}$$

Fonction $\sigma_\alpha u$. — On a l'habitude de désigner par $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, les trois fonctions *entières*,

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 u &= \frac{e^{\eta_1 u}}{\sigma\,\omega_1}\,\sigma(\omega_1 - u), \\ \sigma_2 u &= \frac{e^{(\eta_1+\eta_3)u}}{\sigma(\omega_1 + \omega_3)}\,\sigma(\omega_1 + \omega_3 - u), \\ \sigma_3 u &= \frac{e^{\eta_3 u}}{\sigma\,\omega_3}\,\sigma(\omega_3 - u), \end{aligned} \right.$$

qui sont visiblement telles que $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \sigma_3(0) = 1$, (les facteurs constants ont été naturellement placés dans (40) justement à cet effet). On aura alors pour $\alpha = 1, 2, 3$:

$$(46)\qquad p\,u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2,$$

et la fonction uniforme $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$ représentera une des déterminations du radical $\sqrt{p\,u - e_\alpha}$.

L'équation différentielle (37) permettra maintenant d'écrire :

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} & p'^2 u = 4\,\frac{\sigma^2_1 u\,\sigma^2_2 u\,\sigma^2_3 u}{\sigma^6 u}, \\ & \text{et, par suite :} \\ & p' u = -2\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}, \end{aligned} \right.$$

le signe à prendre étant évidemment le signe $-$, comme on le voit en faisant tendre u vers zéro après avoir multiplié par u^3.

Remarque. — On constate immédiatement que la fonction $\sigma_3 u$, définie par (49), coïncide avec celle qui, sous le même nom, nous a servi de point de départ au Chapitre précédent. En effet, celle-ci était liée à σu par la relation (22), qui ne diffère de l'équation que nous venons d'écrire, que par le changement de u en $\omega_3 - u$.

Fonctions $\zeta_\alpha u$. — Comme l'indique une généralisation toute naturelle, on posera :

$$(48)\qquad \zeta_\alpha u = \frac{\sigma'_\alpha u}{\sigma_\alpha u} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

en sorte qu'on a les trois fonctions *impaires* :

$$(49)\quad \begin{cases} \zeta_1 u = \eta_1 - \dfrac{\sigma'(\omega_1 - u)}{\sigma(\omega_1 - u)} = \zeta(u - \omega_1) + \eta_1 = \zeta(u + \omega_1) - \eta_1 . \\ \qquad\qquad (\text{Cf } (45) \text{ et } (32)) \\ \zeta_2 u = \eta_1 + \eta_3 + \zeta(u - \omega_1 - \omega_3) = \zeta(u + \omega_1 + \omega_3) - \eta_1 - \eta_3 . \\ \zeta_3 u = \eta_3 + \zeta(u - \omega_3) = \zeta(u + \omega_3) - \eta_3 . \end{cases}$$

Il est important d'évaluer les différences telles que $\zeta u - \zeta_1 u$. A cet effet, partons de la formule (40) et faisons-y $v = \omega_1$, il vient :

$$\frac{1}{2}\,\frac{p' u}{p' u - e_1} = \zeta(u + \omega_1) - \zeta u - \eta_1 = \zeta_1 u - \zeta u .$$

On a donc les formules :

$$(50)\qquad \boxed{\zeta_\alpha u - \zeta u = \frac{1}{2}\,\frac{p' u}{p u - e_\alpha}}$$

qui se démontrent toutes de même ; et, par différence, nous trouvons des formules telles que la suivante :

$$(51)\qquad \zeta_1 u - \zeta_3 u = \frac{1}{2}\, p' u \,\frac{e_1 - e_3}{(p u - e_1)(p u - e_3)}$$

qui nous seront également utiles.

Nous aurons également besoin d'utiliser le théorème suivant, relatif spécialement au *cas normal*.

Théorème. — Dans le cas normal $\left(\omega_1 \text{ et } \dfrac{\omega_3}{i} \text{ réels et positifs}\right)$ *pour* $0 < u < \omega_1$, *on a :*

$$(52)\qquad P(u) = \zeta_1 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} \leqq 0 .$$

En effet, par définition, on a :

$$P(u) = \zeta(u - \omega_1) + \eta_1 - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} ,$$

et la dérivée de cette fonction est :

$$P'(u) = -p(u - \omega_1) - \frac{\eta_1}{\omega_1}$$

Dans l'intervalle $0, \omega_1$, cette dérivée varie, toujours dans le même sens, de $-e_1-\frac{\eta_1}{\omega_1}$ à $-\infty$. Elle sera donc toujours *négative*, si je prouve que $e_1+\frac{\eta_1}{\omega_1}$ est positif. Admettons pour un instant ce fait, qui sera vérifié plus loin. Il en résulte que $P(u)$ décroît de 0 à $-\infty$, et qu'il est, par suite, toujours négatif. C. q. f. d.

Reste l'inégalité $e_1+\frac{\eta_1}{\omega_1}>0$, à démontrer. Or celle-ci est presque évidente si l'on se reporte à la définition (45) de $\sigma_1 u$. Nous avons, d'autre part, à cause de (17) :

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}\, e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\, \Pi\,\frac{(1-q^{2n}t^2)(1-q^{2n}t^{-2})}{(1-q^{2n})^2},$$

avec $t=e^{i\pi v}=e^{i\pi\frac{u}{2\omega_1}}$.

La tranformation de u en $u-\omega_1$ change t en $-it$, de sorte que :

$$\sigma(u-\omega_1) = -\frac{2\omega_1}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\, e^{\eta_1\frac{u^2}{2\omega_1}-\eta_1 u+\frac{\eta_1\omega_1}{2}}$$

$$\Pi\,\frac{(1+q^{2n}t^2)(1+q^{2n}t^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

Donc, en désignant par C_1 une constante évidente, on aura :

$$\sigma_1 u = C_1\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\, e^{\eta_1\frac{u^2}{2\omega_1}}\,\Pi\left(1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega_1}+q^{4n}\right).$$

Mais comme on a $\sigma_1(0)=1$, on voit qu'on peut donner à C_1 l'expression :

$$C_1=\frac{1}{\Pi(1+q^{2n})^2}.$$

Et, par suite, on a :

$$\sigma_1 u = \cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\, e^{\eta_1\frac{u^2}{2\omega_1}}\,\Pi\,\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega_1}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}.$$

En dérivant logarithmiquement il vient :

$$\zeta_1 u = \zeta(u + \omega_1) - \eta_1 = \frac{\sigma'_1 u}{\sigma_1 u} = -\frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{\eta_1 u}{\omega_1}$$

$$- \frac{2u}{\omega_1} \Sigma \left(\frac{q^{2n} \sin \frac{\pi u}{\omega_1}}{1 + 2 q^{2n} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}} \right)$$

Une nouvelle dérivation domne enfin :

$$-p(u + \omega_1) = -\frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi u}{2\omega_1}} + \frac{\eta_1}{\omega_1}$$

$$- \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \Sigma \left(\frac{q^{2n} \cos \frac{\pi u}{\omega_1}}{1 + 2 q^{2n} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}} \right)$$

$$- \frac{4\pi^2}{\omega_1^2} \Sigma \left(\frac{q^{4n} \sin^2 \frac{\pi u}{\omega_1}}{\left(1 + 2 q^{2n} \cos \frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}\right)^2} \right)$$

Il n'y a qu'a faire $u = 0$ dans cette formule pour obtenir :

(53) $$e_1 + \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} + \frac{2\pi^2}{\omega_1^2} \Sigma \frac{q^{2n}}{(1 + q^{2n})^2} > 0$$

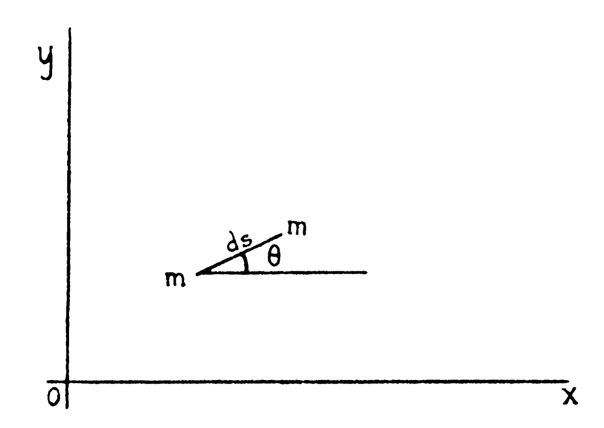
ce qui met en évidence l'inégalité demandée.

CHAPITRE IV

DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

Soit $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ une fonction analytique de la variable $z = x + iy$.

Les formules $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ défiinissent une correspondance entre les points $m(x, y)$ du plan $z = x + iy$,



et les points $M(X, Y)$ d'un autre plan $Z = X + iY$. Cette correspondance est déterminée par la simple équation :

(54) $$Z = f(z).$$

Soit mm' un petit déplacement dz à partir du point z, et MM' le déplacement correspondant dZ à partir du point Z.

Nous aurons, avec des notations évidentes sur la figure :

$$dz = ds \,.\, e^{i\theta}\,, \quad dZ = dS\, e^{i\Theta}\,.$$

Par ailleurs, la fonction $f(z)$ étant analytique, est pourvue d'une d'une dérivée unique en chaque point (x, y), et l'on a :

$$dz = f'(z)\, dz.$$

Plaçons-nous en un point où $f'(z)$ ne soit pas nul ni infini; écrivons $f'(z)$ sous la forme trigonométrique $Ae^{i\alpha}$, il est clair que nous pourrons écrire (en choisissant les déterminations convenables pour les angles) :

$$\frac{dS}{ds} = A\,, \qquad \Theta - \theta = \alpha.$$

Comme A et α sont des nombres qui ne dépendent que du point z, nous pouvons conclure :

1° Dans la correspondance entre les plans, le rapport des dimensions infiniment petites $\frac{dS}{ds}$ autour de deux points correspondants, reste fixe ;

2° L'angle sous lequel se coupent deux courbes se croisant en m est conservé, *en grandeur et en sens*, car si les petits déplacements sur les deux courbes sont $ds \,.\, e^{i\theta}$ et $ds_1\, e^{i\theta_1}$, et sur les courbes correspondantes $dSe^{i\Theta}$ et $dS_1\, e^{i\Theta_1}$, on aura, d'après ce qui précède :

$$\Theta_1 - \Theta = \theta_1 - \theta.$$

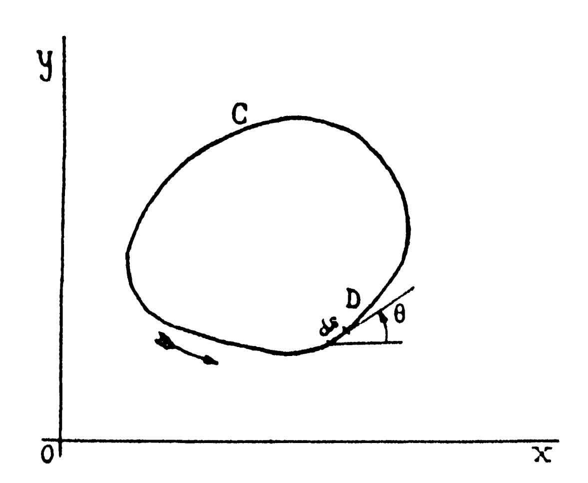
Par conséquent, à une petite figure placée aux environs du point z, il correspondra une petite figure, dans le plan Z, autour du point Z, figure semblable à la première et semblablement disposée.

La correspondance ainsi constituée porte le nom de *représentation conforme* d'un des deux domaines envisagés sur l'autre.

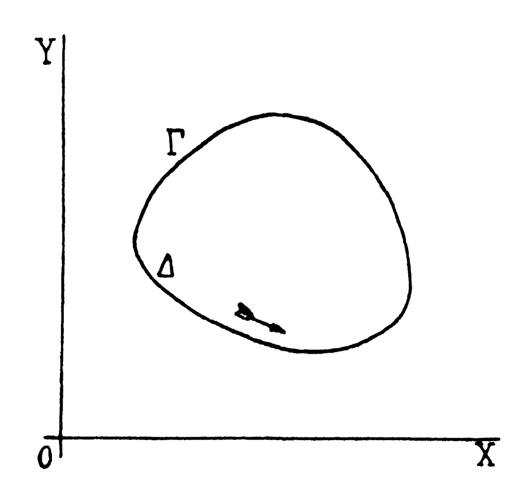
Des réseaux de courbes orthogonales correspondront, dans la transformation, à des réseaux également orthogonaux; ainsi, les familles de courbes $x = C^{te}$, $y = C^{te}$ ou $X = C^{te}$, $Y = C^{te}$ correspondront à des familles orthogonales.

Remarque. — Il va de soi que des points pour lesquels $f'(z)$ serait nul (ou infini) échappent à la démonstration précédente; en ces points, les propriétés géométriques ci-dessus peuvent être en défaut.

Représentation conforme d'un domaine sur un autre. — Le problème qui se pose dans la pratique, est celui-ci : on donne, dans les deux plans z et Z, deux domaines D et Δ, (délimités par des frontières C et Γ) et il s'agit de trouver, si possible, une fonction analytique régulière dans ces domaines, $Z = f(z)$,

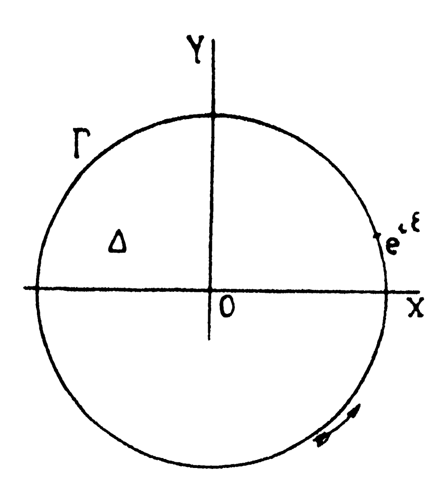


réalisant la représentation conforme de l'un sur l'autre. Je laisserai de côté la démonstration des théorèmes généraux. On démontre que, lorsqu'il s'agit de domaines *simplement connexes* (c'est-à-dire tels que toute courbe fermée intérieure au domaine puisse être, par déformation continue, réduite à un point sans sortir du domaine), on peut



toujours réaliser la transformation, et qu'on peut faire correspondre à trois points donnés de la frontière C, trois points arbitraires du contour Γ : on doit toutefois supposer que les points en question se succèdent dans le même ordre, quand on parcourt les deux contours dans les sens qui se correspondent (d'après les propriétés de similitude ci-dessus, les sens de parcours se correspondent sur les deux contours, de manière à laisser du même côté les aires des domaines). On peut aussi faire correspondre un point intérieur donné de D à un point intérieur donné de Δ, et de plus, un point de la frontière C à un point de Γ

Représentation sur un cercle. — Cherchons à réaliser la représentation conforme d'un domaine D sur un cercle Δ, dont nous prendrons le rayon pour unité, ce qui ne restreint pas la question. Cherchons la fonction $z = F(z)$ qui effectue la correspondance



demandée, et suivons le très élégant mode d'exposition adopté par M. U. Cisotti dans son *Idromeccanica Piana*, I, page 36, Milano, 1921.

Sur la circonférence Γ, on a $Z = e^{i\varepsilon}$ (on peut supposer $0 < \varepsilon < 2\pi$), et, par suite, il vient $dZ = ie^{i\varepsilon}\,d\varepsilon$. Sur le contour C, on a $dz = ds\ e^{i\theta} = |\,dz\,|\ e^{i\theta}$. Donc, sur la frontière, on aura :

$$i\,\frac{dz}{dZ} = \frac{|\,dz\,|}{d\varepsilon}\ e^{i(\theta-\varepsilon)}.$$

Si donc nous considérons l'expression

$$-\,i \log\left(i\,\frac{dz}{dZ}\right)$$

cette fonction de Z, régulière dans Γ si $\dfrac{dz}{dZ}$ n'est ni nul ni infini dans ce cercle, aura une partie réelle égale à $\theta - \varepsilon$ sur la circonférence frontière (en choisissant convenablement la détermination du logarithme).

D'autre part, considérons la fonction.

$$-\,i \log\left[-(1-Z)^2\right].$$

Sur Γ elle se réduit à :

$$-\,i\left[\log\left(4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right) + i\,\varepsilon\right]\cdot$$

Sa partie réelle sera donc égale à ε (en choisissant convenablement la détermination du logarithme).

Donc enfin, la fonction :

(55) $$F(Z) = -i \log \left\{ -i(1-Z)^2 \frac{dz}{dZ} \right\}$$

a une partie réelle qui prend sur Γ la valeur θ. Si, par suite, on connaît la relation qui donne θ en fonction de ε, dans la correspondance des deux contours, on pourra écrire, d'après la formule (6) :

(56) $$F(Z) = -i \log k + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\varepsilon) \frac{1 + Z e^{-i\varepsilon}}{1 + Z e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon ,$$

k désignant une constante arbitraire (réelle positive).

Une fois calculé $F(Z)$, la rotation (55) donnera :

(57) $$z - z_0 = i \int_{Z_0}^{Z} \frac{e^{iF(Z)}}{(1-Z)^2} ,$$

ce qui résoud complètement la question.

La solution précédente contient cinq arbitraires : k et x_0, y_0, X_0, Y_0 (par $z_0 = x_0 + i\,y_0$ et $z_0 = X_0 + i\,Y_0$). On voit qu'elle fait correspondre le point z_0 au point Z_0 ; on peut ensuite disposer de k pour faire correspondre deux points choisis sur les frontières : on y parvient par une équation linéaire, puisque k se met simplement en facteur au second membre de (57). On pourrait aussi s'arranger pour faire correspondre entre eux deux groupes de trois points des frontières, ainsi que cela sera rendu évident quelques lignes plus bas.

La méthode ci-dessus nous permettra de traiter effectivement les cas particuliers qui nous seront ultérieurement utiles. Mais observons qu'il est des cas où des considérations beaucoup plus simples permettent d'achever de suite la question.

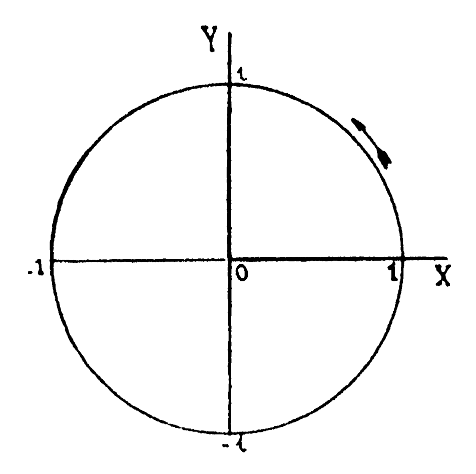
Par exemple, si les domaines à faire correspondre sont limités chacun par une circonférence (ou une droite, qui en est un cas limite), il est à peu près évident que la transformation cherchée sera fournie par la relation homographique :

(58) $$Z = \frac{az + b}{cz + d} ,$$

où a, b, c, d sont quatre constantes. En effet, on constate immédiatement que cette transformation (58) se ramène à une suite de transformations des formes suivantes :

$$Z = z + h \ , \quad Z = Az \ , \quad Z = \frac{1}{z} \ ,$$

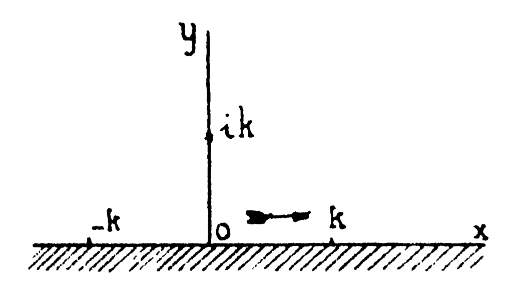
et chacune de ces dernières fait correspondre une circonférence ou une droite à une circonférence (ou une droite).



C'est ainsi que la transformation particulière :

$$(59) \qquad z = ik \frac{1 + Z}{1 - Z} \ ,$$

où k est une constante positive, fait correspondre au cercle de rayon 1 $(| Z | \leq 1)$ le demi-plan situé du côté des y positifs

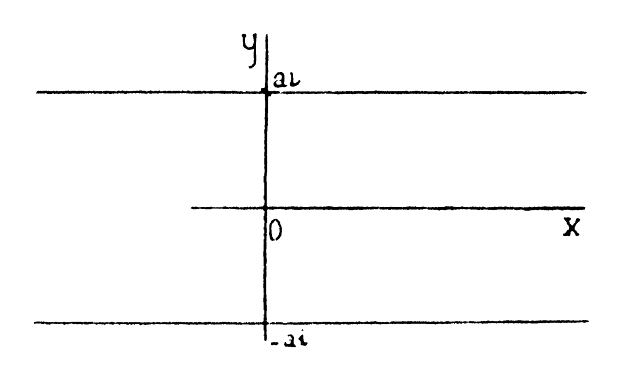


dans le plan z. Les points $(z = \infty \ , \ Z = 1)$; $(z = -k \ , \ Z = i)$; $(z = 0 \ , \ Z = -1)$; $(z = k \ , \ Z = -i)$ se correspondent. Le centre du cercle correspond à $z = ik$.

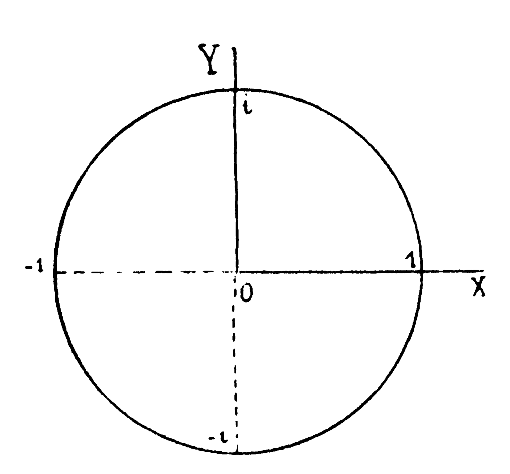
Remarque. — La transformation (58) contenant trois paramètres effectifs, au premier degré, il est immédiat d'observer qu'on pourra toujours choisir ces paramètres, de façon à faire correspondre trois points donnés d'une frontière à trois points donnés de l'autre. Ce choix est même possible, indépendamment de l'ordre de succession

des points dans chaque groupe, ce qui, à première vue, contredit une condition énoncée antérieurement. Mais, cela tient à ce que le domaine limité par chaque circonférence peut aussi bien être le domaine extérieur que le domaine intérteur au cercle (on passe de l'un à l'autre par la transformation $z' = \frac{1}{z}$, s'il s'agit par exemple du cercle de rayon 1 et du centre origine). Comme, dans la correspondance entre deux domaines, on peut toujours prendre un cercle comme domaine intermédiaire correspondant aux deux premiers, et comme ensuite on peut représenter ce cercle sur lui-même par la formule (58) en faisant correspondre un groupe donné de trois points de la circonférence, à un autre groupe de trois points donnés, on aperçoit bien d'où provient la propriété générale énoncée plus haut sur la correspondance des contours.

Représentation d'une bande horizontale, d'épaisseur $2a$, **sur le cercle** Γ. — Appliquons la méthode générale donnée plus haut,



en faisant correspondre les points $(z = \infty, Z = 1)$; $(z = ai, Z = i)$; $(z = -\infty, Z = -1)$; $(z = -ai, Z = -i)$, ce que la symétrie des figures rend évidemment possible.



Dans la formule (56) on pourra prendre l'angle θ égal à π pour $0 < \varepsilon < \pi$, et à 2π pour $\pi < \varepsilon < 2\pi$. Donc :

$$F(Z) = -i \log + \frac{1}{2\pi}\left[\pi \int_0^{\pi} \frac{1 + Ze^{-i\varepsilon}}{1 - Ze^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 + Ze^{-i\varepsilon}}{1 - Ze^{-i\varepsilon}} d\varepsilon\right]$$

Posant $e^{i\varepsilon} = t$, on trouve de suite :

$$\int \frac{e^{i\varepsilon} + Z}{e^{i\varepsilon} + Z} d\varepsilon = -i \log\left[\frac{(u - Z)^2}{u}\right]$$

d'où

$$F(Z) = -i \log k + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i} \log \frac{1 - Z}{1 + Z} ;$$

donc

$$e^{iF(Z)} = ik\left(\frac{1 - Z}{1 + Z}\right),$$

et la formule (57) donne :

$$z - z_0 = -k \int_{Z_0}^{Z} \frac{dZ}{1 - Z^2} = -\frac{k}{2}\left[\log \frac{1 + Z}{1 - Z}\right]_{Z_0}^{Z}.$$

Il est manifeste que $z_0 = 0$ et $Z_0 = 0$ se correspondent, de sorte qu'il reste :

$$z = -\frac{k}{2} \log \frac{1 + Z}{1 - Z}.$$

On déterminera k en fonction de a en faisant correspondre $Z = i$ à $z = ai$, ce qui donne $k = -\frac{4a}{\pi}$. D'où finalement la relation cherchée :

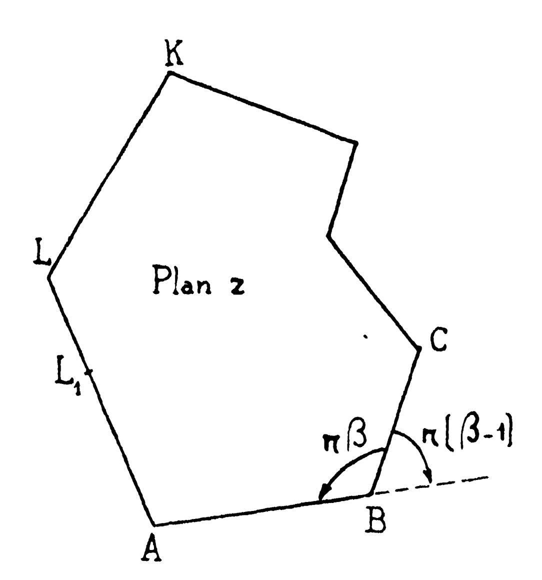
$$(60) \qquad z = \frac{2a}{\pi} \log \frac{1 + Z}{1 - Z},$$

ou encore :

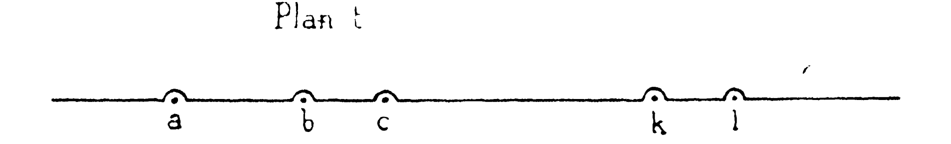
$$Z = \text{th} \frac{\pi z}{4a}.$$

Représentation d'un polygone sur un demi-plan. — On conçoit aisément que l'on puisse suivre la méthode générale, pour représenter d'abord l'aire polygonale sur un cercle Γ : sur la circonférence, le long des arcs correspondant aux côtés du polygone, l'angle θ de la formule (56) sera constant et connu ; on passerait

ensuite du cercle à un demi-plan, par une transformation de la forme (59). Il est plus simple d'utiliser le raisonnement (classique) suivant, qui conduit à une formule célèbre due à Schwartz.



Soit l'aire intérieure à un polygone A'B'C' ... K'L'A' donné dans le plan z, à représenter sur le demi-plan supérieur du plan t.



Partons de l'intégrale :

(61) $$z = \int_{t_0}^{t} (t-a)^{\alpha-1}\,(t-b)^{\beta-1}\,(t-c)^{\gamma-1}\ldots(t-l)^{\lambda-1}\,dt$$

où $a, b, c, \ldots k, l$, sont n constantes réelles $(a<b<c\cdots<l)$, et α, β, ..., λ, n coefficients positifs, tels que :

(62) $$\alpha+\beta+\ldots+\lambda = n-2\ ;$$

t_0 est un affixe quelconque du demi-plan supérieur.

Cherchons la courbe décrite par le point z lorsque t décrit l'axe réel. Lorsque t variera entre deux des points critiques, a et b par exemple, $\dfrac{dz}{dt}$ conservera un argument invariable ; le point z se déplacera donc sur un segment de droite AB, et évidemment toujours dans le même sens ; de même, à bc correspondra un nouveau segment rectiligne BC. Mais si l'on fait décrire à t une petite demi-circonférence de centre b, de façon à tourner autour du point b dans le demi-plan, l'argument de $(t-b)^{\beta-1}$ *diminuera*

de π $(\beta - 1)$; donc, les deux directions BA et BC font entre elles un angle $\beta\pi$; plus précisément, on amènera BA sur BC par une rotation de l'angle $\beta\pi$ effectuée dans le sens *négatif*, etc... Il est clair qu'on peut continuer ainsi jusqu'à un point L , qui correspond à $t = l$. Si l'on fait croître ensuite t de l à $+\infty$, z décrira un segment de droite LL_1 faisant avec KL un angle $\lambda\pi$ compté comme ci-dessus. Et, enfin, si t variait de $-\infty$ à a, on aurait encore un nouveau segment de droite, aboutissant en A .

Je dis que ce dernier segment n'est autre que L_1A , et que le point L_1 est situé sur la droite AL , entre A et L .

En effet, observons d'abord que pour t infini, z a une valeur unique et bien déterminée, de quelque manière que t aille à l'infini dans le demi-plan. En effet, on peut écrire :

$$z = \int_{t_0}^{t} t^{\alpha+\beta+\dots+\lambda-n} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\alpha-1} \dots \left(1 - \frac{l}{t}\right)^{\lambda-1} dt ,$$

c'est-à-dire, en posant $t = \dfrac{1}{u}$, et utilisant l'hypothèse (62),

$$z = -\int_{u_0}^{u} (1 - au)^{\alpha-1} \dots (1 - lu)^{\lambda-1} du.$$

Le point $u = 0$, qui correspond à $t = \infty$, est un point ordinaire, au voisinage duquel on a :

$$\frac{dz}{du} = -1 + P_1 u + P_2 u^2 \dots$$

On aura donc :

$$z = z_{L_1} - u + \frac{P_1}{2} u^2 + \dots$$

z_{L_1} désignant la valeur, bien déterminée, de z qui correspond à $u = 0$. Cette formule montre que l'argument de $(z - z_{L_1})$ varie comme celui de u quand t passe $+\infty$ à $-\infty$ en restant dans le demi-plan ; donc il diminue de π . Il en résulte donc bien que le segment L_1A viendra dans le prolongement de LL_1 , ce que nous voulions établir.

On voit ainsi qu'en choisissant les constantes $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ... $\lambda\pi$, égales aux angles d'un polygone *donné* A'D'C'... L'A' , la formule de *Schwartz* (61) fournira, comme correspondant à l'axe réel du plan t , un polygone ayant les mêmes angles que le polygone donné. La condition (62) n'apporte pas de restriction, c'est la

condition qui existe naturellement entre les angles d'un polygone de n côtés, qu'on peut considérer comme formé de la réunion de $(n - 2)$ triangles.

Pour être complet, il faudrait, maintenant, faire voir qu'on peut choisir les constantes $a, b, c, \ldots l$, de manière à ce que le polygone ABC ... L obtenu ait ses côtés proportionnels à ceux du polygone A'B'C' ... L' donné. Il suffirait de remplacer z par μz, μ étant une constante convenable pour obtenir des polygones égaux. Nous n'insisterons pas sur cette partie du problème, dont nous n'aurons pas besoin, et qui fait l'objet de recherches très profondes et récentes de M. René Garnier (*C. R.*, novembre et décembre 1926).

Sur le contour du polygone, le sens de parcours correspondant à t croissant pourra être, selon les cas, le sens direct ou le sens inverse. Dans la première alternative, les propriétés angulaires de la transformation montrent que l'intérieur du polygone ne peut correspondre qu'au demi-plan supérieur; dans la seconde alternative, au demi-plan inférieur.

Cette correspondance est-elle effectivement univoque, point par point, entre les deux domaines? Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, tout au moins lorsque l'aire polygonale ABC ... L à laquelle on est parvenu, est une aire *simple*, qui ne se recouvre pas partiellement elle-même. Dans ces conditions, soit :

(63) $$z = F(t)$$

la relation (61), et supposons que nous soyons dans la première des des deux alternatives ci-dessus : la représentation ne peut s'envisager que sur le demi-plan t supérieur. La fonction $F(t)$ est évidemment régulier dans tout ce demi-plan. Soit z_1 un point situé à l'intérieur de l'aire polygonale. Cherchons combien l'équation $z_1 = F(t)$ a de racines par rapport à t, dans le demi-plan supérieur. Pour cela, envisageons l'intégrale :

$$\int \frac{F'(t)\,dt}{F(t) - z_1}$$

étendue au contour formé par l'axe réel du plan t, et une grande demi-circonférence, de centre origine, dans le demi-plan supérieur. Il résulte aisément des développements ci-dessus, que l'intégrale étendue à la demi-circonférence est nulle à la limite, quand le rayon de celle-ci devient infini. Il reste donc à évaluer simplement :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F'(t)}{F(t) - z_1}\,dt$$

or, d'une part, cette intégrale est égale, dans le théorème de Cauchy, à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus de la fonction à intégrer, concernant les pôles situés dans le demi-plan ; ces pôles sont seulement les racines de notre équation $F(t) = z_1$, et le résidu correspondant à chacun est égal au degré de multiplicité de cette racine. On a donc :

$$J = 2i\pi \times N$$

N étant le nombre des racines cherchées.

D'autre part, évaluons l'intégrale J en y faisant le changement de variable (63), elle devient :

$$J = \int_{ABC\ldots LA} \frac{dz}{z - z_1} = \Big[\log(z - z_1)\Big]_{ABC\ldots A};$$

le point z décrivant alors le polygone $ABC \ldots A$ dans le sens direct, et le point z_1 étant intérieur au polygone, le vecteur $(z - z_1)$ tourne d'un tour complet autour de z_1 dans le sens positif, et l'expression précédente vaut :

$$J = 2i\pi.$$

On a donc $N = 1$, c'est-à-dire que l'équation (63) fait correspondre à un point z du polygone un point et un seul du demi-plan. La réciproque étant évidente, la transformation est bien univoque entre les domaines considérés.

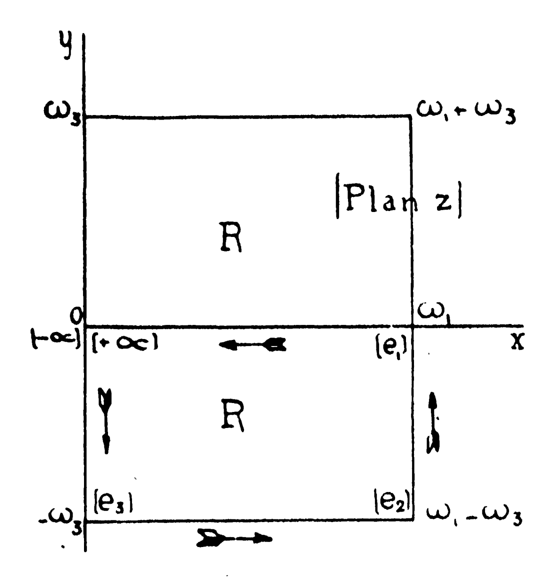
Représentation d'un rectangle sur un demi-plan. — Une première solution résulte immédiatement des propriétés de la fonction $t = pz$ dans le cas normal $\left(\omega_1 \text{ et } \frac{\omega_3}{i} \text{ réels positifs}\right)$.

Considérons les deux rectangles R et R' qu'indique la figure, construits à l'aide des vecteurs ω_1 et $\pm\omega_3$. Quand le point z décrit le contour de R, t prend des valeurs conjuguées de celles qui correspondent au contour de R', c'est-à-dire des valeurs égales à ces dernières, qui sont, comme on sait, réelles. Il en résulte que lorsque z décrit dans le sens positif le contour de R, t décrit dans le sens positif l'axe réel du plan t. La relation :

(64) $$t = pz$$

effectue donc la représentation conforme de l'aire du rectangle sur celle du demi-plan supérieur. Et par suite du raisonnement général

ci-dessus, cette représentation est effectivement réciproque et univoque.



A cause de l'équation différentielle de la fonction p (éq. 37), on peut écrire avec les notations actuelles :

$$\frac{dt}{dz} = \pm 2\sqrt{(t-e_1)(t-e_1)(t-e_3)}$$

on en conclut immédiatement les relations suivantes, en intégrant

Plan t

e_3 0 e_2 $e.$

successivement (dz) le long des quatre côtés du rectangle :

$$(65)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e_1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} \\ \quad = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e_3}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{(e_1-t)(e_2-t)(t-e_3)}} \\ \omega_3 = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(e_3-t)}} \\ \quad = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{e_2}^{e_1} \frac{dt}{\sqrt{(e_1-t)(t-e_2)(t-e_3)}} \end{cases}$$

les radicaux sont tous entendus ici avec leur valeur arithmétique.

Ces formules (65) sont précieuses pour calculer ω_1 et ω_3 si ce sont les nombres $e_1\ e_2\ e_3$ qui sont donnés (avec la relation

$e_1 + e_2 + e_3 = 0$, qu'on peut toujours réaliser par un changement d'origine préalable sur l'axe réel du plan t).

Les résultats qui précèdent sont en coïncidence avec ceux qu'on obtiendrait en appliquant la formule (61) de Schwartz. Il suffirait d'y faire :

$$n = 4\,, \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}\,,$$

d'où, en modifiant légèrement la notation :

$$dz = \frac{dt}{\sqrt{(t' - a)(t' - b)(t' - e)(t' - d)}}\,.$$

Il n'y a plus qu'à envoyer à l'infini une des quatre racines du dénominateur, en posant par exemple $t' - d = \frac{m}{t}$ (m : constante réelle), pour être immédiatement ramené à une équation facile à identifier avec :

$$dz = \frac{dt}{\sqrt{(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)}}\,.$$

Représentation d'une aire annulaire sur une couronne circulaire. — Le cas des aires multiplement connexes est beaucoup plus compliqué que celui des aires simplement connexes, dont nous avons vu précédemment quelques exemples. J'ai donné (Annales de l'École Normale, 1921, *Sur la représentation conforme des aires doublement connexes*) une méthode extrêmement générale pour le cas des aires doublement connexes, c'est-à-dire équivalentes à un anneau, du point de vue de l'*Analysis Situs*.

Cherchons simplement ici à réaliser la représentation d'une aire telle que D sur l'aire Δ d'une couronne circulaire : rien n'empêche de supposer que les rayons des circonférences frontières Γ et Γ' sont, l'un égal à 1, l'autre égal à un nombre q plus petit que 1.

Soit :

$$Z = F(z)$$

la relation cherchée, qui établit la correspondance désirée si elle est possible.

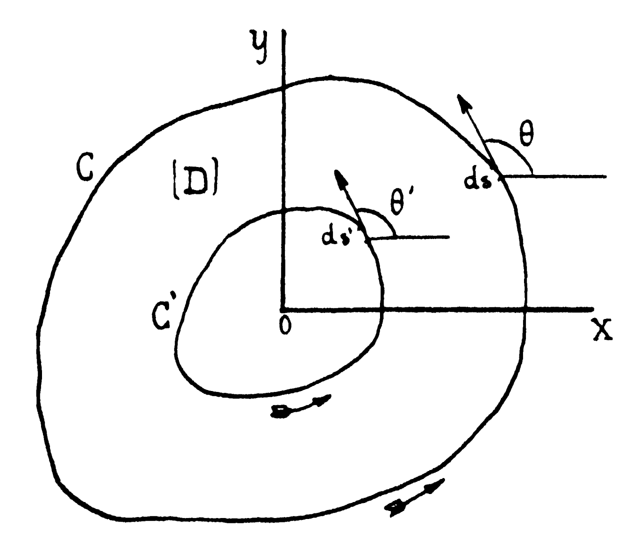
Sur Γ, ou Γ', on aura $Z = e^{i\varepsilon}$ ou $Z = q e^{i\varepsilon}$. Si, d'autre part, on se déplace sur les frontières C ou C' de (D), on aura :

$$dz = |\,dz\,|\, e^{i\theta} \qquad \text{ou} \qquad dz = |\,dz\,|\, e^{i\theta'}$$

θ et θ' désignant les angles de la figure. Donc :

$$i\,\frac{dz}{dZ} = \frac{|\,dz\,|}{d\varepsilon}\,e^{i(\theta-\varepsilon)}\,, \quad \text{ou} = \frac{|\,dz\,|}{q\,d\varepsilon}\,e^{i(\theta'-\varepsilon)}.$$

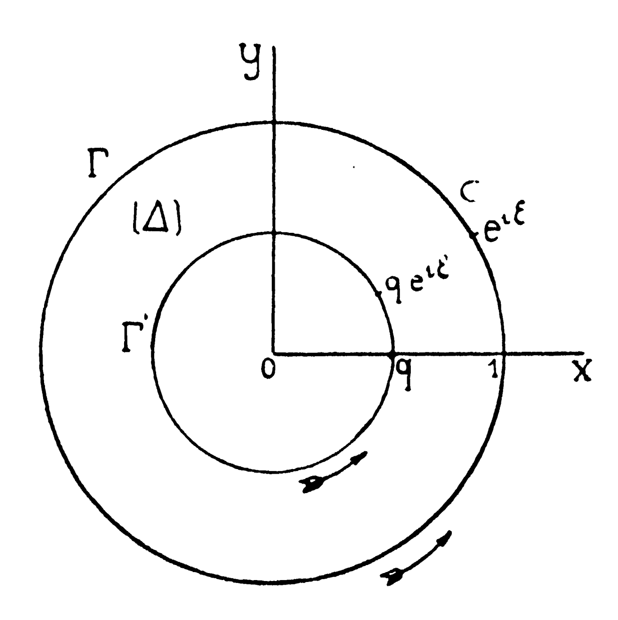
Si donc, comme plus haut dans le cas des aires simplement



connexes, on envisage la fonction :

$$-\,i\log\left(i\,\frac{dz}{dZ}\right),$$

elle aura une partie réelle égale à $\theta - \varepsilon$, ou à $\theta' - \varepsilon$, sur les frontières.



Mais, d'autre part, la fonction $-\,i\log Z$ (qui n'a pas de points singuliers dans Δ) a sa partie réelle égale à ε sur les frontières.

Donc, la fonction :

(66) $$F(Z) = -i \log\left(iZ \frac{dz}{dZ}\right)$$

a sa partie réelle égale à θ , ou à θ' , sur les frontières.

Si donc nous désignons par $\theta = \Phi(\varepsilon)$, et $\theta' = \Psi(\varepsilon)$ les valeurs de θ et θ' qui correspondent aux points, d'argument ε , de Γ et Γ' , notre formule générale (25) nous permettra d'écrire :

(67) $$\left\{\begin{aligned} F(Z) &= ik \\ &+ \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon \\ &- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Psi(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Les demi-périodes ω_1 et ω_3 (réelle et imaginaire pure respectivement), seront liées par la relation :

$$q = e^{\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}},$$

et la condition de régularité (10) exigera entre les données la relation :

(68) $$\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \Psi(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Une fois construit $F(Z)$ par la formule (67), la relation (66) nous donnera :

(69) $$z = z_0 - i\int_{Z_0}^{Z} \frac{e^{iF(Z)}\,dZ}{Z}$$

équation où Z_0 et z_0 désignent deux points arbitraires des deux domaines, points qui se correspondent visiblement.

La méthode ci-dessus est particulièrement aisée si les fonctions C et C' de D sont constituées par deux polygones : θ et θ' prennent alors diverses valeurs constantes, connues, sur les arcs de Γ et Γ' qui correspondent aux côtés de ces polygones, et la formule (67) s'obtient débarrassée de tout signe de quadrature. La formule que l'on obtient ainsi, et que nous n'expliciterons pas dans le cas général, se rattache à une formule, analogue à celle de Schwartz, et trouvée par M. R. Thiry, pour représenter un tel domaine, limité par deux polygones, sur l'aire d'une bande indéfinie d'un plan t , dans lequel deux points distants de l'unité sur une même horizontale,

sont considérés comme jouant le même rôle, et comme non distincts.

Il est clair, en effet, que :

$$t = -\frac{a\,\omega_1}{\pi\,\omega_3}\log\left(\frac{Z}{q}\right)$$

transforme une telle aire (d'épaisseur a) en la couronne circulaire Δ de rayons extrêmes 1 et q .

Pour plus de détail nous renverrons à notre Mémoire cité plus haut, et au Mémoire de M. Thiry (Thèses et Annales de l'École Normale, *Sur les solutions multiples des problèmes d'Hydrodynamique relatifs aux mouvements glissants*, 1921).

CHAPITRE V

RAPPEL DES FORMULES GÉNÉRALES CONCERNANT LES FLUIDES PARFAITS

Il est bien connu que, dans un fluide parfait isotrope, si l'on appelle u, v, w, les composantes de la vitesse de la molécule fluide qui passe au point (xyz) à l'instant t, si, d'autre part, p désigne la pression et ρ la masse de l'unité de volume en ce même point, les équations du mouvement peuvent s'écrire, sous la forme d'Euler :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}\,; \quad \ldots\,; \quad \ldots\,;$$

avec l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

(X Y Z) est la force extérieure résultante qui s'exerce sur l'unité de masse au point $(x\,y\,z)$ [on n'a explicité qu'une équation du premier groupe].

L'équation complémentaire pour un *liquide* parfait à température constante, se réduit à $\rho = \mathrm{C^{te}}$. Dans ce qui suit, nous nous placerons d'abord dans ce cas. Si, en outre, nous supposons le mouvement permanent (les dérivées relatives à t sont alors nulles) les équations se réduiront aux suivantes :

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}\,; \quad \ldots\,; \quad \ldots\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array}\right.$$

On sait qu'on appelle *tourbillon* au point (xyz) le vecteur ξ, η, ζ défini par les formules :

(71) $$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Admettons que les forces X, Y, Z, dérivent d'une fonction de forces $U(x, y, z)$, et posons :

$$Q = U - \frac{p}{\rho}; \qquad V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

les premières équations (70) peuvent s'écrire :

(72) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{V^2}{2}\right) = 2(\eta w - v); \quad \ldots; \quad \ldots;$$

Supposons encore que les tourbillons soient partout nuls, il existe alors un potentiel φ pour les vitesses, et l'on a :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

avec :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

à cause de la dernière équation (70).

Les équations (72) donnent alors immédiatement :

(73) $$\varphi - \frac{V^2}{2} = \text{Cte}.$$

Cette relation constitue le théorème de Bernouilli pour les liquides *irrotationnels* en mouvement permanent.

Par exemple, s'il n'y a pas de forces extérieures, et si l'on appelle p_0 et V_0 la pression et la vitesse en un point particulier, la formule (73) se réduit à :

(74) $$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_0^2 = \text{Cte}.$$

Dans ce cas, le problème de la détermination d'un mouvement se ramène à l'intégration, par rapport à φ, de l'équation harmonique :

(75) $$\Delta \varphi = 0$$

après quoi p est fourni par l'équation (74). La recherche de φ est un problème en général difficile. Sur une paroi fixe, limitant le liquide en quelque endroit, on devra avoir la condition $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, qui exprime que la vitesse reste tangente à la paroi ; sur une surface libre en communication avec l'air extérieur, on devra écrire : $p =$ Cte. Au moyen de telles conditions aux limites, par exemple, il faudra déterminer φ.

Si le mouvement est à *deux dimensions*, c'est-à-dire si tout se passe de même dans tous les plans $z =$ Cte, la variable z n'intervient plus ; l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

elle montre qu'on peut poser, ψ étant une nouvelle fonction (*fonction de courant*, parce que les lignes de courant sont évidemment les lignes d'équation $\psi =$ Cte)

$$(76) \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

conjointement à :

$$(77) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

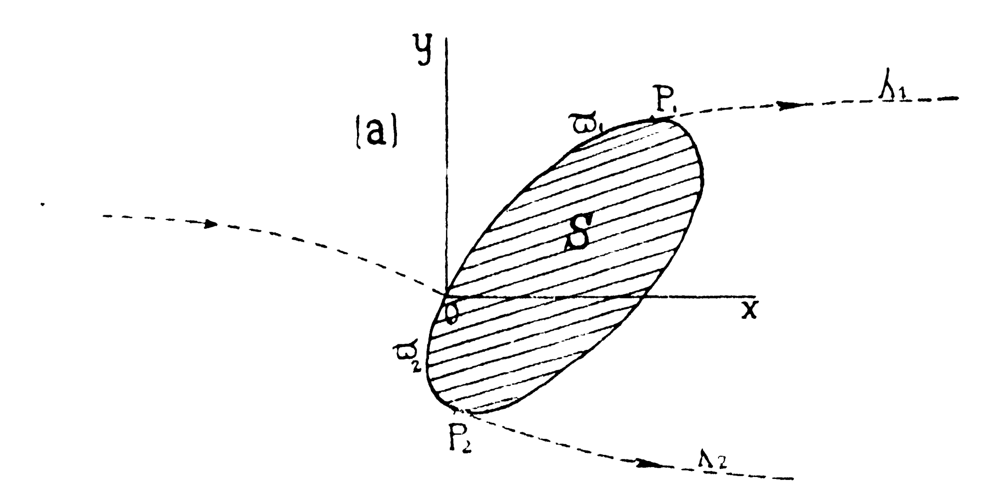
qui expriment que le mouvement est irrotationnel.

On voit donc que $\varphi + i\psi$ est une *fonction analytique* de la variable $z = x + iy$, et φ et ψ sont deux fonctions harmoniques associées. On soupçonne donc l'utilité des développements contenus dans les précédents chapitres, en ce qui concerne les mouvements des liquides à deux dimensions.

CHAPITRE VI

EXPOSÉ DE LA THÉORIE DES SILLAGES

Il s'agira dans cette théorie, d'un liquide (ρ est constant ; nous pourrons sans inconvénient supposer $\rho = 1$, grâce à un choix d'unités convenable) ; ce liquide sera en mouvement permanent irrotationnel autour d'un solide S donné, lequel solide aura la forme d'un cylindre indéfini dans la direction oz normale au plan de la figure xoy. On suppose que tout se passe identiquement de même dans tous les plans normaux à oz, toutes les lignes de courant suivies par les molécules fluides, étant dans ces plans ; on est donc dans le cas du « mouvement à deux dimensions ». On imagine qu'à l'infini en amont du solide S' supposé fixe, le liquide possède une vitesse donnée V_0, qu'on peut prendre parallèle à ox, et dont on peut faire la grandeur V_0 égale à 1 par un choix d'unités opportun. Il reviendrait naturellement au même de supposer le liquide en repos à l'amont, et d'imaginer le cylindre mobile avec la vitesse $-V_0$, dans le liquide parallèlement à l'axe ox.



Nous imaginerons alors que, dans le plan xoy, le mouvement par rapport à S possède les caractères suivants : parmi les lignes de courant venant de l'amont, il en est une qui se divise en deux en

un certain point O du front de S, pour entourer, au moins partiellement, l'obstacle, dont elle épouse la forme jusqu'en deux certains points P_1 et P_2, à partir desquels les deux fractions de la ligne de courant se détachent du solide pour délimiter, à l'arrière de celui-ci, une région dans laquelle nous admettrons que le liquide est au repos par rapport au corps : cette région constituera le « sillage » ; en première approximation, elle figurera cette région, non entraînée par le courant général, que l'on observe à l'arrière d'un solide immergé, dans certaines conditions d'expérience.

On peut démontrer (cf. H. Villat, *Aperçus théoriques sur la Résistance des Fluides*, p. 27, Gauthier-Villars, 1920), qu'il faut nécessairement que les lignes λ_1 et λ_2 enfermant le sillage théorique ci-dessous, s'étendent à l'arrière jusqu'à l'infini. Nous admettrons ici ce point et nous admettrons aussi que le long des parois ϖ_1 (oP_1) et ϖ_2 (oP_2) le courant reste adhérent au corps, ce qui exclut certaines formes physiquement acceptables pour S. (Cf. le volume cité plus haut, pour l'examen du cas général, voir notamment le chapitre V de cet ouvrage).

En vertu des hypothèses faites, il y a dans le fluide un potentiel des vitesses, φ, et une fonction de courant ψ ; celles-ci n'étant définies qu'à une constante près, nous conviendrons qu'elles sont nulles au poent o, point de bifurcation du courant.

Les composantes de la vitesse V (qui sera nulle au point o et dans le sillage, et différent de zéro partout ailleurs, égale à 1 aux grandes distances), seront comme au Chapitre V désignées par (u, v).

En posant :

$$(78) \qquad z = x + iy \quad , \quad f = \varphi + i\psi$$

nous savons que f sera une fonction analytique de z. Si en outre nous avons

$$(79) \qquad w = u - iv,$$

les formules

$$(80) \qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad v = \frac{\partial\varphi}{dy} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

nous donneront

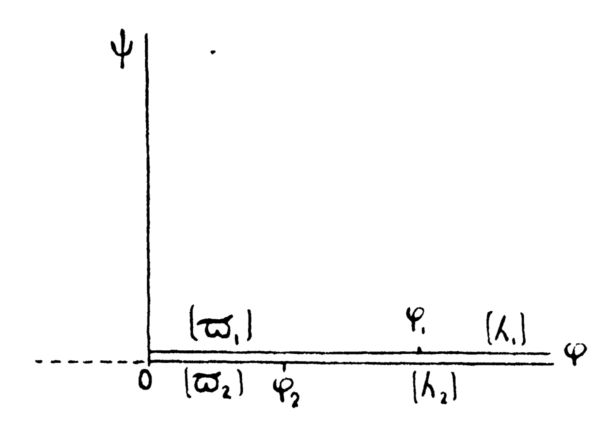
$$\frac{df}{dz} = w.$$

Attachons plus particulièrement notre attention sur la région (a) occupée par le fluide en mouvement par rapport à S , en faisant par conséquent abstraction du sillage, et précisons les conditions particulières qui interviennent sur les limites de ce domaine (a).

D'abord, sur les lignes $\varpi_1, \lambda_1, \varpi_2, \lambda_2$, on a $\psi = 0$, puisque ces lignes constituent la ligne de courant (dédoublée) qui passe en 0. Quand on décrit ces lignes à partir du point 0 , le potentiel φ ira constamment en croissant de zéro à $+\infty$, puisque nous admettons que la vitesse V n'est jamais nulle en dehors des exceptions signalées plus haut ; on a en effet, V désignant la valeur absolue $\sqrt{u^2+v^2}$, et en se déplaçant sur les lignes susdites, dont l'élément d'arc est appelé ds ,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = u \cdot \frac{u}{V} + v \cdot \frac{v}{V} = V > 0$$

donc φ croît, et il va jusqu'à l'infini puisque V devient égal à 1



aux grandes distances sur λ_1 ou λ_2 , du côté de la région a . A cette région a , correspond donc dans le plan f tout ce plan coupé tout le long du demi-axe $O\varphi$.

Par ailleurs, l'équation de Bernouilli (74) appliquée à l'intérieur du sillage, nous montre que la pression y est constante : $p = p_0$; d'autre part la pression dans un liquide réel varie d'une façon continue, donc la pression est nécessairement encore égale à p_0 sur les lignes λ_1 et λ_2 , du côté de a. Or la même équation (74) appliquée le long de λ_1 , par exemple, nous donnera

$$p + \frac{1}{2} V^2 = \text{constante}$$

au point à l'infini sur λ_1 , nous aurons $p = p_0$ et $V = 1$. Donc l'équation qui convient à la région (a) est

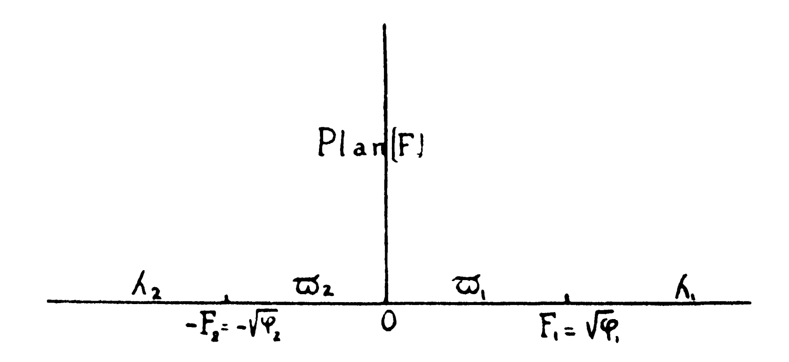
(81) $$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Elle montre que, *tout le long des lignes* λ_1 et λ_2, où $p = p_0$, la vitesse sera constamment égale à 1, vitesse de courant général.

Ces préliminaires étant posés, voici l'élégante méthode qu'emploie M. T. Lévi-Civita pour achever la question, c'est-à-dire pour déterminer tous les éléments, géométriques et mécaniques, du mouvement.

f étant une fonction analytique de z, il en est de même de $\frac{df}{dz} = w$. Les régions, correspondant à l'aire a du plan z, sur les différents plans de ces variables, se correspondent conformément les unes sur les autres; il en sera de même si l'on introduit de nouvelles variables fonctions analytiques de l'une quelconque des précédentes. Or supposons que nous parvenions, par l'intermédiaire peut-être de quelques nouvelles variables, à réaliser la représentation conforme du plan w sur le plan f; cela reviendra à dire que nous connaîtrons par là même $\frac{dz}{df}$ en fonction de f, et alors il est manifeste qu'une simple quadrature nous fournira z en fonction de f; on pourra ensuite achever tous les calculs, et notamment répartir les vitesses dans le plan z, soit en éliminant f, soit en le conservant comme variable auxiliaire.

Or, en partant du plan f coupé le long de $O\varphi$, il est extrêmement facile de lui faire correspondre, d'abord un demi-plan; puis



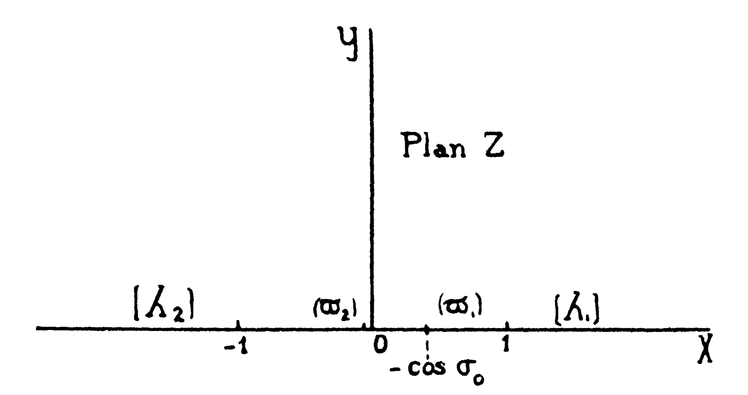
un demi-cercle, par les transformations élémentaires suivantes, nous avons sur les diverses figures intermédiaires, marqué suffisamment les points correspondants :

$$f = F^2;$$

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)\,Z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2),$$

ou encore

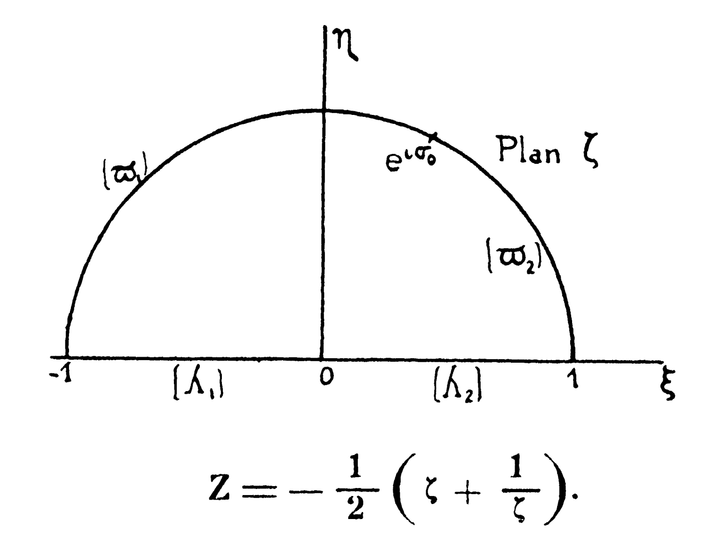
$$F = a\,(Z + \cos\sigma_0)$$



en posant

$$\cos\sigma_0 = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}\ ,\quad a = \frac{1}{2}\,(F_1 + F_2)\ ;$$

et enfin :



$$Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

En résumé :

$$f = a^2\left[\cos\sigma_0 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2. \tag{82}$$

Ces transformations sont faciles à vérifier. Le point de bifurcation O du courant sur S', correspond à $Z = -\cos\sigma_0$, et à $\zeta = e^{i\sigma_0}$, σ_0 étant une constante convenable, entre O et π si l'on veut.

Notre domaine (a) est maintenant représentable analytiquement sur le demi-cercle du plan ζ. Ce qui va faire le succès de la méthode, c'est que nous avons isolé sur l'axe réel du plan ζ, les

portions de frontières correspondant aux « lignes libres » ou « lignes de jet » λ_1 et λ_2, et sur la demi-circonférence les portions correspondant aux parois solides ϖ_1 et ϖ_2. Or la condition $(V=1)$ relative aux lignes libres est d'une nature particulièrement simple. Posons, avec M. Lévi-Civita,

$$(83) \qquad \frac{df}{dz} = w = e^{-i\omega} \quad , \quad \omega = \theta + i\tau$$

ω sera une fonction analytique de z, ou de ζ, et la définition de w nous donnera

$$u - i v = e^{\tau} \cdot e^{-i\theta} ,$$

c'est-à-dire

$$V = e^{\tau} \quad , \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\theta} .$$

La vitesse est donc e^{τ}, et elle fait avec Ox, dans le plan z, un angle θ.

De là résulte que, sur λ_1 et λ_2, c'est-à-dire sur le diamètre horizontal du plan ζ, la fonction $\omega(\zeta)$ sera *réelle* ($V = 1$ et $\tau = 0$). Au point $\zeta = 0$, qui correspond au point z à l'infini, θ sera nul, puisque le courant est parallèle à Ox à l'infini, donc

$$(85) \qquad \omega(0) = 0.$$

(C'est cette condition qui fixe l'orientation du courant dans le plan). Enfin la fonction $\omega(\zeta)$ est régulière dans tout le demi-cercle. On peut donc la *prolonger* analytiquement sur le demi-cercle symétrique de celui-ci par rapport à l'axe réel, au moyen du principe de Schwartz (Chap. I), en attribuant à $\omega(\zeta)$ des valeurs conjuguées aux points symétriques par rapport à cet axe ; et par suite en attribuant à θ les mêmes valeurs en de tels points, notamment sur la circonférence frontière.

Ceci posé, la détermination de la fonction $\omega(\zeta)$ résulte, ainsi que je l'ai montré dans ma Thèse (*Annales de l'Ecole Normale*, 1911), de la forme supposée connue, au moins qualitativement, du profil ϖ_1 et ϖ_2 de S. La partie réelle de ω représente l'angle qui fait la vitesse avec Ox. Si donc on connaît le profil de S, on sait comment θ varie quand le point ζ décrit la demi-circonférence supérieure, et par suite aussi la demi-circonférence inférieure à cause de la symétrie. Soit $\theta = \Phi(\sigma)$ la relation qui lie θ à l'argument σ du point de la circonférence $(\zeta = e^{i\sigma})$ le long de la paroi S ;

alors la fonction $\omega(\zeta)$ sera donnée par notre formule (6) [avec $\beta_0 = 0$, puisque $\omega(0)$ doit être réel, et même nul], ou encore par l'expression (7) résultant de la symétrie.

On aura ainsi :

$$\omega(\zeta) = \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos\sigma + \zeta^2} d\sigma \tag{86}$$

et la condition d'orientation (85) impose à la fonction Φ la relation

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{87}$$

La fonction $\omega(\zeta)$ étant ainsi déterminée, tous les éléments géométriques du mouvement résulteront des équations (80), (82), (83), qui donnent immédiatement :

$$dz = e^{i\omega} df = \frac{1}{2} a^2 e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{88}$$

De là on tirera :

$$z = \int_{e^{i\sigma_0}}^{\zeta} e^{i\omega} df \tag{89}$$

puisque les points $z = 0$ et $\zeta = e^{i\sigma_0}$ se correspondent évidemment.

Quant à la pression en chaque point de la région a, elle sera connue par la formule (81).

Le mouvement avec toutes ses caractéristiques sera donc entièrement connu. Par exemple, les parois ϖ_1 et ϖ_2 de S correspondront aux points $\zeta = e^{i\sigma}$ de la circonférence ($0 < \sigma < \sigma_0$ pour ϖ_2 ; $\sigma_0 < \sigma < \pi$ pour ϖ_1) ; un calcul élémentaire donne de suite les formules suivantes pour représenter paramétriquement ces parois :

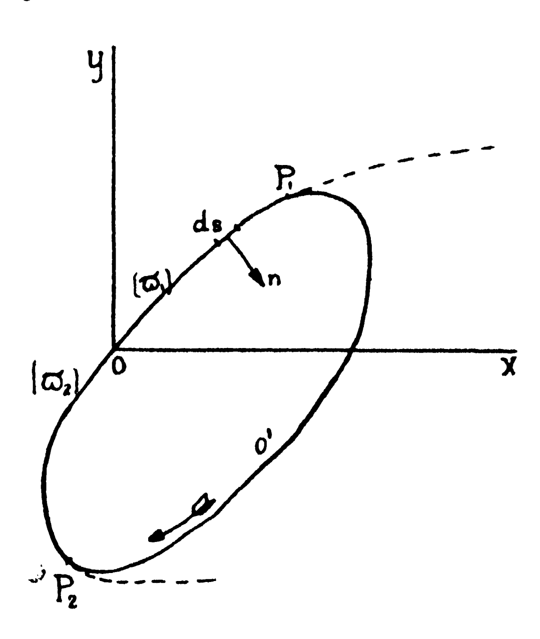
$$x = 2a^2 \int_\sigma^{\sigma_0} e^{-\tau} \cos\theta (\cos\sigma - \cos\sigma_0) \sin\sigma\, d\sigma$$

$$y = 2a^2 \int_\sigma^{\sigma_0} e^{-\tau} \sin\theta (\cos\sigma - \cos\sigma_0) \sin\sigma\, d\sigma.$$

Résistance du solide S. — La résistance du solide S, c'est-à-dire la résultante des pressions $p\, ds$ exercées (normalement) sur chaque élément ds du profil, a pour composantes

(90) $$\mathcal{R}_x = \int_C p \cos nx \, ds \quad , \quad \mathcal{R}_y = \int_C p \cos ny \, ds \quad ,$$

les intégrales ayant été étendues à tout le contour C du profil, parcouru par exemple dans le sens de la flèche (sens correspondant



au sens trigonométrique du plan ζ), et n étant la normale au contour vers l'intérieur. Quant à p , il est égal à p_0 le long de $P_1 O' P_2$ dans le sillage, et à $p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$, d'après (81), sur $P_2 O P_1$. Il est évident que p_0 donne dans le total une contribution nulle, et qu'il reste

(91) $$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{R}_x &= \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} (1 - V^2) \cos nx \, ds \\ \mathcal{R}_y &= \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} (1 - V^2) \cos ny \, ds \end{aligned} \right.$$

Mais on a évidemment

(92) $$\cos nx \, ds = + dy \quad , \quad \cos ny, ds = - dx \quad ,$$

et par suite :

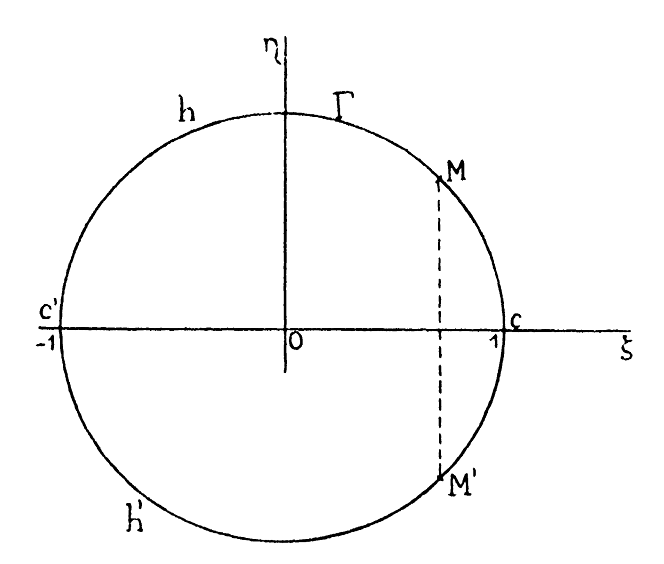
(93) $$\mathcal{R} = \mathcal{R}_x + i \mathcal{R}_y = \frac{1}{2i} \int_{P_1OP_2} (1 - V^2) \, dz,$$

ce qui, à cause de (84) et de (88), donne

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2i} \int_{chc'} e^{i\omega} \, df - \frac{1}{2i} \int_{chc'} e^{2\tau + i\omega} \, df$$

les deux intégrales étant étendues à la demi-circonférence chc'.

Mais observons que la fonction $\omega(\zeta)$ a été prolongée par



symétrie sur le demi-cercle inférieur ; si $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ est sa valeur en un point ζ de l'arc chc', sa valeur au point symétrique, dont l'affixe est justement $\frac{1}{\zeta}$, sera

$$\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \theta - i\tau = -2i\tau + \theta + i\tau = -2i\tau + \omega(\zeta)\ ;$$

donc $2\tau + i\omega$ calculé au point $M(\zeta)$, est égal à $i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ c'est-à-dire à $i\omega$ calculé au point M'.

D'autre part, il résulte facilement de la formule (82) que la différentielle df ne change pas quand on remplace ζ par $\frac{1}{\zeta}$ en passant de M en M'. Ce fait tient du reste tout simplement à ce que f est réel sur ϖ_1 et ϖ_2, ψ y étant nul.

On a donc :

$$\int_{chc'} e^{2\tau + i\omega(\zeta)}\, df = \int_{chc'} e^{i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\, df = \int_{ch'c'} e^{i\omega(\zeta)}\, df$$

et par suite :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} e^{i\omega(\zeta)}\, df, \tag{94}$$

l'intégrale étant étendue à toute la circonférence Γ parcourue dans le sens direct.

Maintenant, puisque la fonction $e^{i\omega(\zeta)}$, comme $\omega(\zeta)$, est régu-

lière dans tout le cercle intérieur, le théorème de Cauchy nous ramène tout simplement au calcul des résidus de la fonction $e^{i\omega}\frac{df}{d\zeta}$ aux pôles intérieurs à ce cercle. Or le seul pôle est le point $\zeta = 0$, au voisinage duquel on a :

$$e^{i\omega(\zeta)} = 1 + i\,\zeta\,\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2}\left[i\,\omega''(0) - \omega'^2(0)\right] + \ldots\ldots$$

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{a^2}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right).$$

Le résidu cherché est donc

$$i\,a^2\cos\sigma_0\,.\,\omega'(0) + \frac{a^2}{2}\left[\omega'^2(0) - i\,\omega''(0)\right],$$

et son produit par π sera évidemment égal à $\mathcal{R}$. Comme la réalité de $\omega(\zeta)$ sur l'axe réel assure que les dérivés de cette fonction soient réelles au point 0, nous en concluons de suite les formules

$$(95)\qquad \mathcal{R}_x = \frac{\pi a^2}{4}\,\omega'^2(0)\quad;\quad \mathcal{R}_y = \frac{\pi a^2}{4}\left[4\cos\sigma_0\,.\,\omega'(0) - \omega''(0)\right].$$

Moment résultant des pressions sur S. — Calculons le moment résultant M, par rapport au point O de bifurcation, des pressions élémentaires. On a de suite

$$\mathcal{M} = \int_{P_2OP_1O'P_2}\left[x\,.\,p\cos ny - y\,.\,p\cos nx\right]ds\,,$$

c'est-à-dire à cause des formules (92),

$$(96)\qquad \mathcal{M} = -\int_C p\,(x\,dx + y\,dy)\;;$$

On devra, comme plus haut, remplacer p par p_0 ou $p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$ suivant les arcs considérés. p_0 disparaîtra évidemment dans le résultat, et l'on trouvera

$$(97)\qquad \begin{cases} \mathcal{M} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{P_2OP_1}(1 - V^2)(x\,dx + y\,dy) \\ \quad = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{P_2OP_1}(x\,dx + y\,dy +)\,\dfrac{1}{2}\int_{P_2OP_1}V^2(x\,dx + y\,dy). \end{cases}$$

La première intégrale du dernier membre est toute connue si l'on possède les coordonnées des points P_1 et P_2. De toute façon, en désignant par $z' = x - iy$ l'imaginaire conjuguée de z, on a

$$(98) \qquad \int x\,dx + y\,dy = \mathcal{R} \int z\,dz',$$

le symbole $\mathcal{R}$ désignant la partie réelle de l'expression qui suit ce signe.

D'autre part, en ce qui concerne la seconde intégrale, on a

$$I = \int_{P_2OP_1} V^2 (x\,dx + y\,dy) = \int_{P_2OP_1} \left| \frac{df}{dz} \right|^2 \frac{z\,dz' + z'\,dz}{2};$$

mais

$$\left| \frac{df}{dz} \right|^2 = \frac{df}{dz} \frac{df'}{dz'},$$

en désignant par f' l'imaginaire conjuguée de f.

Donc

$$I = \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} \left(\frac{df}{dz} \frac{df'}{dz'} z\,dz' + \frac{df}{dz} \frac{df'}{dz'} z'\,dz \right).$$

Mais, sur P_2OP_1 $df' = df$, car f est alors réel $(\psi = 0)$ donc on peut encore écrire

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{P_2OP_1} \left[\left(\frac{df}{dz} \right)^2 z\,dz + \left(\frac{df'}{dz'} \right) z'\,dz' \right] \\ &= \mathcal{R} \int_{P_2OP_1} \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z\,dz. \end{aligned} \right.$$

A cause de (98) et (99).

$$(100) \qquad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \mathcal{R} \int_{P_2OP_1} \left[\left(\frac{df}{dz} \right)^2 z\,dz - z\,dz' \right].$$

L'équation (83) nous donne

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\omega(\zeta)},$$

donc

$$\left\{ \begin{aligned} dz &= e^{i\omega(\zeta)}\, df \\ dz' &= e^{-i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\, df, \end{aligned} \right.$$

car sur P_2OP_1, df est réel, et nous avons vu que l'imaginaire conjuguée de $\omega(\zeta)$ était $\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Finalement il vient donc :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\, \mathfrak{R} \int_{P_2OP_1} \left[e^{-i\omega(\zeta)} - e^{i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right] df. \tag{101}$$

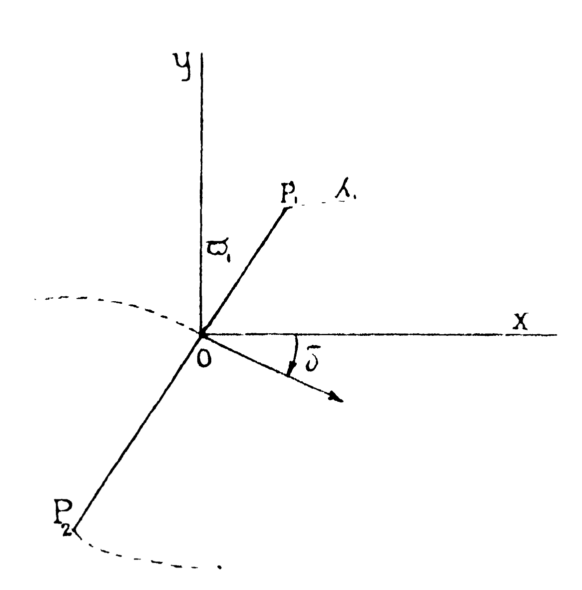
Le calcul de cette intégrale permet de fixer dans le plan z la position exacte de la résultante des pressions.

CHAPITRE VII

APPLICATION A UN EXEMPLE PARTICULIER EXAMEN DES CONDITIONS DE VALIDITÉ DU CAS GÉNÉRAL

Nous allons tout d'abord faire l'application des formules générales au cas où le solide est une simple lame plane, dont la section par le plan xoy est la ligne P_1OP_2 rectiligne.

Les deux portions OP_1, OP_2, de la lame à partir du point de bifurcation, font avec ox deux angles $\delta \pm \frac{\pi}{2}$, que



provisoirement nous noterons $\delta \pm \alpha$, en vue d'obtenir en passant un résultat concernant un dièdre d'ouverture 2α [au reste, le cas du dièdre, lorsque le point de bifurcation coïncide avec le sommet de l'angle, n'est guère plus compliqué que celui que nous allons traiter].

Quoi qu'il en soit la condition (87) donne ici, $\Phi(\sigma)$ étant égal

à $(\delta - \alpha)$ pour $0 < \sigma < \sigma_0$, et à $(\delta + \alpha)$ pour $\sigma_0 < \sigma < \pi$:

$$\delta = \sigma_0 - \frac{\pi}{2}. \tag{102}$$

Pour effectuer les calculs de la théorie, il nous faut construire la fonction $\omega(\zeta)$; celle-ci est fournie par la formule (7) ou la formule (6), savoir

$$\left\{\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\,\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\sigma)\,\frac{1+\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{-i\sigma}}\,d\sigma, \end{aligned}\right. \tag{103}$$

avec $\Phi(2\pi - \sigma) = \Phi(\sigma)$ dans ce dernier cas.

Dans le cas actuel, ces intégrales sont très faciles à calculer explicitement. Mais nous n'avons besoin que de la partie imaginaire de $\omega(\zeta)$ sur la circonférence frontière (nous y connaissons d'avance sa partie réelle). Observons qu'on peut écrire, en désignant par $e^{i\sigma}$ un point de la frontière, et en modifiant la notation,

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(s) - \Phi(\sigma)]\,\frac{1+\zeta e^{-is}}{1-\zeta e^{-is}}\,ds$$
$$+ \frac{\Phi(\sigma)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\zeta e^{-is}}{1-\zeta e^{-is}}\,ds.$$

Le dernier terme du second membre se réduit à $\Phi(\sigma)$; cela résulte, soit d'un calcul direct, soit de la remarque que pour $\Phi(s) = 1$ sur toute la frontière, la fonction $\omega(\zeta)$, réelle sur l'axe réel, coïncide nécessairement avec l'unité.

Nous avons donc

$$\omega(\zeta) = \Phi(\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(s) - \Phi(\sigma)]\,\frac{1+\zeta e^{-is}}{1-\zeta e^{-is}}\,ds. \tag{104}$$

Mais quand ζ tend vers $e^{i\sigma}$, cette expression conserve un sens précis, et l'on voit qu'en appelant $\tau(\sigma)$ la valeur de τ (partie imaginaire de ω) pour $\zeta = e^{is}$, on a

$$\tau(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(s) - \Phi(\sigma)]\,\operatorname{cotg}\frac{s-\sigma}{2}\,ds. \tag{105}$$

Pour l'exemple à traiter, plaçons-nous pour fixer les idées sur la paroi ϖ_2, alors $o < \sigma < \sigma_0$, $\Phi(\sigma) = \delta - \alpha$, et il suffira d'intégrer

dans (105) entre σ_0 et $2\pi - \sigma_0$, seul intervalle où le crochet $\Phi(s) - \Phi(\sigma)$ ne sont pas identiquement nul, il vaut alors 2α, et l'on obtient

$$\tau(\sigma) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_{\sigma_0}^{2\pi-\sigma_0} \operatorname{cotg}\frac{s-\sigma}{2}\, ds = \frac{2\alpha}{\pi}\log\frac{\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}$$

On ne change rien en écrivant ce résultat sous la forme

$$\tau(\sigma) = \frac{2\alpha}{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}}\right|$$

et l'on constate sans peine que cette formule vaut encore pour la paroi ϖ_1. De sorte que dans les deux cas on a

(106)
$$e^{-\tau} = \left(\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

En nous rappelant qu'ici $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et utilisant la formule (88) pour $\zeta = e^{i\sigma}$, nous constaterons aisément que la longueur d'un arc de paroi pris sur ϖ_1 ou ϖ_2 à partir du point O, est fourni par l'équation

$$\varpi = 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0}\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma.$$

La formule élémentaire

$$\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}(\cos\sigma - \cos\sigma_0) = 2\sin^2\frac{\sigma_0+\sigma}{2}\, Sgn(\sigma_0-\sigma),$$

donne alors

$$\varpi = a^2\, Sgn(\sigma_0-\sigma)\times\int_{\sigma}^{\sigma_0}[2\sin\sigma - \sin(2\sigma+\sigma_0) + \sin\sigma_0]\, d\sigma.$$

En faisant

$$\sigma = \pi \quad \text{ou} \quad \sigma = 0,$$

on obtiendra respectivement les longueurs

$$\varpi_1 \text{ et } \varpi_2 \quad \text{de} \quad OP_1 \quad \text{et} \quad OP_2.$$

On trouve

$$(107)\quad \begin{cases} \varpi_1 = a^2 [2 + 2\cos\sigma_0 + 2\cos\sigma_0 \sin^2\sigma_0 + (\pi - \sigma_0)\sin\sigma_0] \\ \varpi_2 = a^2 [2 - 2\cos\sigma_0 - 2\cos\sigma_0 \sin^2\sigma_0 + \sigma_0 \sin\sigma_0]. \end{cases}$$

La longueur totale de la lame est donc

$$(108)\qquad l = \varpi_1 + \varpi_2 = a^2 (4 + \pi \sin\sigma_0).$$

Calculons maintenant la pression totale sur la lame. Celle-ci dépend uniquement, d'après les formules (95), de $\omega'(o)$ et de $\omega''(o)$. On a d'ailleurs pour ω la formule (103) avec

$$\Phi(\sigma) = \delta + \frac{\pi}{2}.$$

Comme on sait que, pour $|\zeta| < 1$, on a

$$\frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} = 1 + 2\zeta\cos\sigma + 2\zeta^2\cos 2\sigma + \ldots ,$$

on trouvera sans autre calcul :

$$\omega'(o) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\sigma\right)_0^{\sigma_0} + \left(\delta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\sigma\right)_{\sigma_0}^{\pi}\right] \\ = -2\sin\sigma_0$$

$$\omega''(o) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin 2\delta\right)_0^{\sigma_0} + \left(\delta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin 2\sigma\right)_{\sigma_0}^{\pi}\right] \\ = -2\sin 2\sigma_0.$$

Par conséquent

$$(109)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_x + i\,\mathfrak{R}_y = a^2\pi\sin^2\sigma_0 - \frac{i\,a^2\pi}{2}\sin 2\sigma_0.$$

De là on tire immédiatement la formule classique, due à lord Rayleigh.

$$\frac{\mathfrak{R}_x}{l} = \frac{\pi\sin^2\sigma_0}{4 + \pi\sin\sigma_0}$$

qu'on peut aussi écrire à cause de (102)

(110) $$\frac{\mathcal{R}_x}{l} = \frac{\pi \cos^2 \delta}{4 + \pi \cos \delta}.$$

Dans le cas particulier où la lame est normale au courant, on a $\delta = 0$, et la pression totale $\mathcal{R}$, réduite à sa composante $\mathcal{R}_x$, donne lieu à l'égalité non moins connue

(111) $$\frac{\mathcal{R}}{l} = \frac{4 + \pi}{\pi}$$

On peut retrouver d'ailleurs ces résultats simples par bien d'autres procédés. Nous avons donné le procédé ci-dessus à titre d'application de la méthode générale, et en vue d'un détail obtenu chemin faisant et qui va nous être utile un peu plus loin.

On voit que, dans ce même exemple, il n'est survenu aucune difficulté particulière. Les équations générales du chapitre précédent permettent de mettre toutes les courbes en place. Les formules qui donnent ϖ_1 et ϖ_2 permettent, si une lame $P_1 P_2$ est *donnée d'avance*, de longueur et d'inclinaison connues, de disposer des constantes arbitraires qui figurent dans les équations, pour que le calcul ci-dessus soit justement relatif à cette lame : δ est en effet connu, et par suite τ_0 (équation 102) ; le rapport $\frac{\varpi_2}{\varpi_1}$ tiré de (107) est alors connu, et détermine sur $P_1 P_2$ la position du point O de bifurcation ; l'équation (108), où l est la longueur donnée $P_1 P_2$, détermine la constante a^2. Après quoi la construction des lignes λ_1 et λ_2 est aisée et ne donne lieu à aucune remarque particulière. Enfin la pression est fournie dans le liquide par la relation (81), en dehors du sillage, et elle est égale à p_0 à l'intérieur de celui-ci.

On sait que dans un liquide naturel, dans des conditions d'expérience normales, la pression ne saurait être négative. Donc p_0 et l'expression

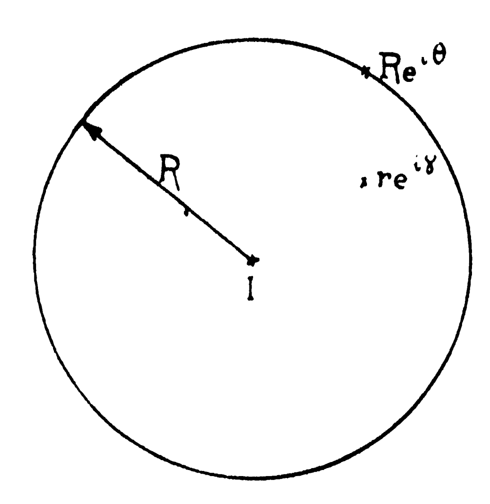
(112) $$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

doivent nécessairement être positives, quelle que soit la valeur (positive) de p_0. Cela entraîne évidemment la condition

(113) $$V \leq 1.$$

Or dans l'exemple actuel, cette condition est certainement vérifiée partout. Cela tient à ce que l'on a (équation 84) : $V = e^{\tau}$, τ étant

en fonction harmonique régulière dans tout le fluide en mouvement. Or il est bien connu qu'une telle fonction harmonique ***ne saurait avoir de maximum ou de minimum en un point intérieur*** **à son domaine de régularité. Voici du reste la démonstration de ce fait élémentaire, basé sur la formule (7') de Poisson. De la formule (7') il résulte en effet sans peine, qu'une fonction harmonique régulière autour d'un point I, dans un cercle C de rayon R et de**



centre I, est donné, en tout point $z = re^{i\gamma}$ du cercle $(r < R)$ par la formule

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\gamma - \theta) + r^2} d\theta$$

$\Phi(\theta)$ désignant la valeur de τ au point de la frontière : $Re^{i\theta}$
Au centre I du cercle on a donc

$$\tau_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta.$$

Il en résulte que τ_1 ne saurait par exemple être un *maximum* pour la fonction τ ; sinon, le rayon R étant choisi assez petit, toutes les valeurs de $\Phi(\theta)$ sur la circonférence seraient inférieures à τ_1, et l'équation précédente aurait un second membre inférieur aussi à τ_1, d'où contradiction. La même démonstration entraîne que τ_1 n'est pas non plus un minimum.

Donc les maxima et minima de τ ne sauraient se produire que *sur les frontières*

Or actuellement, les frontières comportent : les lignes λ_1 et λ_2 où par construction même $\tau = 0$, et les lignes ϖ_1 et ϖ_2 où τ satisfait à l'équation (106). Il est bien facile de s'assurer sur cette équation même, que τ reste toujours négatif sur les parois.

Donc on a partout $\tau \leqq 0$, c'est-à-dire $V \leqq 1$, et notre solution est entièrement légitimée.

Examen de diverses difficultés. Conditions de validité des solutions. — Nous venons de voir un cas où la solution trouvée pouvait être aisément vérifiée. Mais dans le cas général il peut se présenter des complications. Tout d'abord une hypothèse, faite tout au début, peut se trouver infirmée après coup : nous avons en effet admis que, sur ϖ_1 et ϖ_2 le courant suivrait, sans s'en écarter, le contour du solide immergé. Cela suppose une certaine régularité pour ce contour. Par exemple, je vais montrer que, si le contour présente *un angle vif en un autre point que le point de bifurcation* O, le problème n'est pas résoluble par les formes générales du Chapitre VI.

Soit en effet 2α l'angle des deux tangentes en un tel point A du contour, ces tangentes étant orientées dans le sens où le courant est supposé longer l'obstacle ; soit e^{is_0} le point du plan ζ qui correspond au point A ; appelons $\delta \pm \alpha$ les angles des susdites tangentes orientées, avec l'axe ox. Appelons $\omega_0(\zeta)$ la fonction particulière qui correspondait aux valeurs constantes de sa partie réelle, $\delta - \alpha$ sur l'arc $0 < \sigma < s_0$, $\delta + \alpha$ sur l'arc $s_0 < \sigma < \pi$. On vient d'apprendre à construire, dans le présent Chapitre, cette fonction $\omega_0(\zeta)$. Soit enfin $\omega(\zeta)$ la fonction qui doit servir à résoudre le problème du mouvement, pour le cas du corps actuellement envisagé.

Si nous formons la différence $\Delta = \omega(\zeta) - \omega_0(\zeta)$, elle correspondra à une partie réelle qui, sur la circonférence frontière du plan (ζ), restera continue au point e^{is_0} qui correspond à A. Cette différence Δ est donc continue au point en question ; on a donc, en désignant par $\tau(\sigma)$ et $\tau_0(\sigma)$ les valeurs de la partie imaginaire de ω et de ω_0 sur les parois,

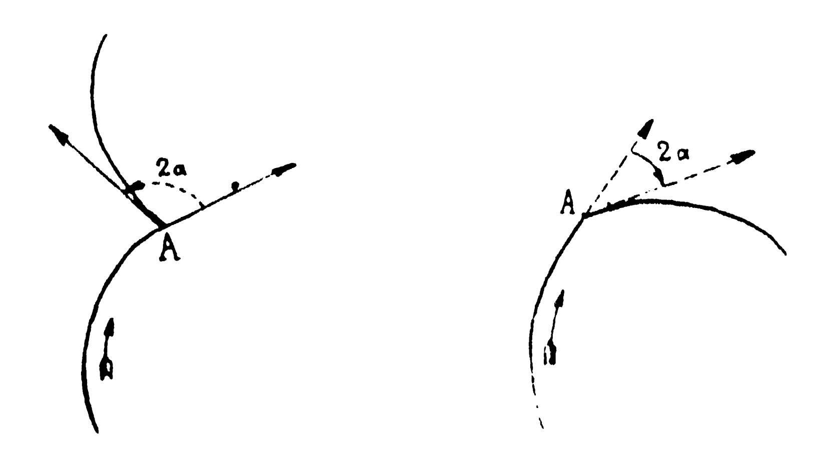
$$\tau(\sigma) = \tau_0(\sigma) + \text{fonction continue}$$

au voisinage du point $A\ (\sigma = s_0)$. Or il résulte de la formule (106), qu'on peut écrire

$$e^{\tau_0} = \left(\frac{\sin\left|\dfrac{s_0 - \sigma}{2}\right|}{\sin\dfrac{s_0 + \sigma}{2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}$$

Donc, si $\alpha > o$ (voir *fig.*), e^{τ_0} reste fini (et s'annule même) pour $\sigma = s_0$, et $V = e$ s'annule : il n'y a pas de difficulté, le courant longe le corps dans le *creux* qu'il présente, et la vitesse est

simplement nulle au fond du creux. Si au contraire $\alpha < o$ (voir *fig.*), c'est-à-dire qu'il s'agit d'un angle formant pointe vers le courant, e^{ω} devient égal à $-\infty$, ce qui est physiquement absurde.



Tout cela provient du reste de ce fait conforme au bon sens, que la vitesse ne saurait changer brusquement de direction dans un liquide réel, qu'en devenant nulle.

Ainsi donc, pour des profils S présentant des angles formant creux devant le liquide, pas de difficultés ; pour des profils au contraire présentant un (ou plusieurs) angles vifs dans le courant, le problème *n'est pas résolu* par ce qui précède ; il faut que le courant, qui arrive en l'un des sommets correspondants, quitte, au moins momentanément le profil solide pour venir au besoin s'y rattacher plus loin. Je renverrai pour cette question à deux mémoires publiés dans les *Annales de l'École Normale*, 1914, et dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915. (Sur le changement d'orientation d'un solide dans un courant fluide).

A vrai dire, dans le cas d'un angle vif *unique*, il existerait une échappatoire, qui consisterait à placer le point de bifurcation O en son sommet. Mais l'exemple de deux lames OP_1, OP_2 rectilignes accolées suffit à montrer que, *en général*, cela est impossible : en effet si l'on se donne les orientations de ces lames, les calculs se développeront comme dans les premiers paragraphes du présent Chapitre, et l'on trouvera pour les deux longueurs OP_1 OP_2 deux expressions dont le rapport sera complètement déterminé. Par conséquent le problème se trouvera résolu, pour un système de deux lames donné, pour une inclinaison particulière seulement. Il ne le sera pas pour les autres.

On trouvera ailleurs (*loc. cit.*) des développements plus complets concernant le problème nouveau qui se pose ici.

Mais il existe d'autres sortes de difficultés, que M. M. Brillouin a signalées le premier, et qui peuvent rendre illusoire la solution du

problème général, même si l'on est assuré que le courant épouse bien, sans les quitter, les parois ϖ_1 et ϖ_2 du corps solide. Nous exposerons brièvement ces difficultés, ainsi que les conditions propres à les éviter, en suivant à peu de chose près le mode d'exposition que nous avons adopté dans nos *Aperçus Théoriques sur la Résistance des Fluides*, p. 42 et suiv. Gauthiers-Villars, 1920. On trouvera des détails beaucoup plus développés dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* : « Sur la validité des Solutions des Problèmes d'Hydrodynamique », 1914.

Pour que la solution soit physiquement acceptable, il est nécessaire : 1° que la pression soit partout positive, c'est-à-dire que les vitesses, comme nous l'avons vu plus haut, soient au plus égales à 1 ; 2° que lorsque l'on effectue la construction du plan z par la formule (89), on trouve bien un domaine d'un seul tenant, dont les frontières ne se recoupent pas, ni elles-mêmes ni les unes les autres; ce dernier danger de recoupement est bien réel, et M. Brillouin en a donné des exemples simples (*Annales de Chimie et Physique*, 1910).

Nous exposerons quelques résultats concernant le cas où le corps solide, et le mouvement du liquide, sont symétriques par rapport à l'axe ox du plan z . On a alors évidemment

$$(114) \qquad \sigma_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon).$$

Nous avons déjà vu, en ce qui concerne les vitesses, que tout revient à constater que τ ne devient pas positif dans la région en mouvement, et nous avons vérifié qu'il suffisait de s'assurer du fait *sur les frontières*. Or, dans le plan ζ , sur le diamètre $O\xi$, τ est nul ; il suffit donc de s'occuper des valeurs $\tau(s)$ de τ aux points $\zeta = e^{is}$ de la demi-circonférence supérieure. Il sera par suite utile de savoir comment varie $\tau(s)$, et par suite d'apprendre à calculer sa dérivée $\frac{d\tau}{ds}$. On y parvient aisément en observant que, θ étant la partie réelle de $\omega(\zeta)$, les deux fonctions associées θ et τ donnent naissance d'après la formule (1') à l'égalité

$$(115) \qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{dn}$$

où n désigne la normale extérieure au cercle

Or reprenons la fonction $\omega(\zeta)$ sous la seconde forme (103); posons-y $\zeta = \rho e^{is}$, il vient

$$(116) \qquad \omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon) \frac{1 + \rho e^{i(s-\varepsilon)}}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} d\varepsilon$$

Tant que ρ est inférieur à 1, on peut écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon) \frac{e^{i(s-\varepsilon)}}{[1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}]^2} d\varepsilon.$$

Supposons maintenant, pour nous mettre de suite dans les conditions de l'application que nous avons en vue, que la fonction $\Phi(\varepsilon)$ sont continue entre 0 et 2π, sauf pour $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; supposons en outre que la dérivée $\Phi'(\varepsilon)$ existe et soit elle-même continue, sauf peut-être pour

$$\varepsilon = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \frac{3\pi}{2} \quad .$$

Alors une intégration par parties nous donnera

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{i}{\pi\rho} \left[\frac{\Phi(\varepsilon)}{1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}} \right]_0^{2\pi} - \frac{i}{n\rho} \int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}} \quad ,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des discontinuités de Φ, et en transformant le dernier terme comme nous l'avons fait pour la formule (104),

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{i}{\pi\rho} \left\{ \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{1-\rho\, e^{i\left(s-\frac{\pi}{2}\right)}} + \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{2}-0\right) - \Phi\left(\frac{3\pi}{2}+0\right)}{1-\rho\, e^{i\left(s-\frac{3\pi}{2}\right)}} \right\}$$
$$- \frac{i}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)}{1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}} d\varepsilon - \frac{i}{\pi\rho} \Phi'(s) \int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}} .$$

Or, pour $\rho < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{1-\rho\, e^{i(s-\varepsilon)}} = 2\pi \; ;$$

il reste donc, en ne considérant que la partie réelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)] \frac{\sin\ (s - \varepsilon)}{1 - 2\rho \cos(s - \varepsilon) + \rho^2} d\varepsilon$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] \frac{\sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - 2\rho\cos\left(s - \frac{\pi}{2}\right) + \rho^2}$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[\Phi\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right)\right] \frac{\sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right)}{1 - 2\rho\cos\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) + \rho^2} .$$

En faisant ensuite tendre ρ vers 1, on en conclut, $\frac{\partial \theta}{\partial \rho}$ devenant $\frac{\partial \theta}{\partial n}$, que l'on a d'après (115).

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(o)] \operatorname{cotg} \frac{s - \varepsilon}{2} d\varepsilon$$

$$- \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] \operatorname{cotg} \frac{s - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$- \Phi \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right)\right] \operatorname{cotg} \frac{s - \frac{2\pi}{2}}{2} .$$

Rappelons-nous enfin que la définition de la fonction Φ entraîne (f. 114).

$$\Phi(2\pi - \varepsilon) = \Phi(\varepsilon)\ ; \quad \Phi(\pi - \varepsilon) = - \Phi(\varepsilon)\ ; \quad \Phi'(2\pi - \varepsilon) = - \Phi'(\varepsilon)\ ;$$
$$\Phi'(\pi - \varepsilon) = \Phi'(\varepsilon).$$

On en conclut immédiatement :

$$(117) \qquad \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{2\cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon - \Phi'(s)\sin s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon$$
$$- \frac{2\Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{\pi \cos s}$$

formule que, par suite de la symétrie, il suffit d'étudier dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ pour s. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Si $\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon$ est une fonction de ε croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, τ est toujours décroissant, donc toujours négatif

puisqu'il part de la valeur zéro (au point P_2). La vitesse croît alors régulièrement de 0 à 1 quand on parcourt les arcs OP_1 et OP_2.

Dans le cas où $\Phi(\varepsilon)$ ne satisfait à aucune condition de ce genre, il est cependant nécessaire que pour $s = 0$, la dérivée commence par être négative (ou nulle). Cela donne la condition nécessaire très importante

$$(118) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}\, d\varepsilon - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \geqq 0.$$

Lorsque cette inégalité (118) se transforme en *égalité*, la configuration correspondaute dans le plan z est elle-même très importante ; les profils qui y satisfont ont été désignés par M. Brillouin sous le nom de *proues*, pour la raison que voici.

Cherchons le rayon de courbure R d'une ligne de jet, λ_2 par exemple, au point P_2 de détachement d'avec le solide. On a en général sur λ_2 où τ est nul,

$$R = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|$$

et

$$ds = |dz| = \frac{a^2}{2}\left|\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right|$$

d'après la formule (88), où $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$ds = \frac{a^2}{2}(1 - \zeta^4)\left|\frac{d\zeta}{\zeta^3}\right|.$$

Donc

$$R = \frac{a^2}{2}\,\frac{1 - \zeta^4}{\left|\zeta^3 \dfrac{d\theta}{d\zeta}\right|}.$$

Pour le point P_2, ζ réel tendra vers 1, et $\frac{d\theta}{d\zeta}$ deviendra la dérivée normale calculée ci-dessus, pour $s = 0$, savoir

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}\, d\varepsilon + \frac{2}{\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right).$$

Si donc cette expression ne s'annule pas, comme $1 - \zeta^4$ s'an-

nule en P_2, on en conclura que le rayon de courbure R est *nul* : la ligne λ_2 s'infléchit donc immédiatement à l'arrière du corps : cela est sans inconvénient si cet obstacle est, comme on dit, *en gouttière*, c'est-à-dire s'il est formé par une lame pratiquement sans épaisseur, arrêtée en P_1 et P_2. Mais en général il n'en est pas ainsi : le corps est un solide qui se continue, dans le sillage, au-delà des points P_1 et P_2, et ces derniers points, qui résultent du calcul même, sont *à priori* des points du profil sans propriété particulière du point de vue géométrique. L'existence physique du solide dans ces conditions est alors incompatible avec la nullité du rayon de courbure des lignes de jet au départ. Il est dans ce cas nécessaire que l'on ait l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0 \tag{119}$$

et le profil est dit alors une proue.

Pour terminer disons un mot au sujet de l'allure des lignes de jet, en vue d'assurer une condition générale pour que les frontières du domaine fluide ne se recoupent pas. Nous supposerons, comme cela est pratiquement le cas le plus fréquent, que le long du profil P_1OP_2 (ne se coupant pas lui-même) l'angle du courant avec ox soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Dans ces conditions, il est clair que si, le long de λ_2, c'est-à-dire pour $0 < \zeta < 1$, nous constatons que θ va en décroissant constamment, la ligne λ_2 s'écartera progressivement de l'axe ox à mesure qu'on s'éloignera du corps, et par suite il n'y aura pas de recoupements possibles sur les frontières du domaine du plan z. Or $\theta(\zeta)$, auquel $\omega(\zeta)$ se réduit sur λ_2, est donné par (103), que nous prendrons encore sous sa seconde forme. Un calcul entièrement semblable à celui qui nous a donné $\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}$ nous donne successivement

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{i}{\pi\zeta}\left[\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{1 + i\zeta}\right.$$

$$\left. + \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) - \Phi\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right)}{1 - i\zeta}\right] - \frac{i}{\pi\zeta}\int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon)\,\frac{d\zeta}{1 - \zeta e^{-i\varepsilon}}$$

$$= \frac{4\,\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{\pi(1 + \zeta^2)} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varepsilon)\,(1 + \zeta^2)\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{(1 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2\sin^2\varepsilon}$$

Prenons le cas des profils *convexes* devant le courant ; alors $\Phi'(\varepsilon)$ est négatif entre $0, \frac{\pi}{2}$. Nous savons d'autre part déjà que la condition (118) est nécessaire, elle entraîne, K étant en nombre supérieur ou égal à 1, l'égalité

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\sin \varepsilon} .$$

Ceci nous permet d'écrire $\frac{d\omega}{d\zeta}$ sous la forme suivante

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\omega}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \times \frac{\Phi'(\varepsilon)\, d\varepsilon}{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon\,[(1-\zeta^2)^2 + 4\,\zeta^2 \sin^2\varepsilon]},$$

en posant

$$P = K\,[(1-\zeta^2)^2 + 4\,\zeta^2 \sin^2\varepsilon] - (1+\zeta^2)^2 \sin^2\varepsilon.$$

Or P est toujours positif, car il est au moins égal à

$$(1-\zeta^2)^2 + 4\,\zeta^2\sin^2\varepsilon - (1+\zeta^2)^2\sin^2\varepsilon = (1-\zeta^2)^2\cos^2\varepsilon.$$

Par conséquent on voit que $\frac{d\omega}{d\zeta}$ c'est-à-dire $\frac{d\theta}{d\zeta}$ reste négatif sur la ligne λ_2 , et par suite la ligne λ_2 s'écarte progressivement de l'axe ox , en partant du corps solide.

Par suite enfin, pour les corps solides convexes, jusques et y compris le cas des *proues*, les difficultés ci-dessus signalées ne se présentent pas, dès que l'inégalité (118) est vérifiée.

Nous laisserons de côté un examen plus complet des questions qui se rattachent aux conditions précédentes, ainsi que des généralisations, en nombre considérable, qu'on a pu donner dans diverses directions à la théorie des sillages. Nous renverrons le lecteur soit à notre ouvrage *Aperçus Théoriques sur la Résistance des Fluides*, soit à l'*Idromeccanica Piana*, de M. U. Cisotti (Milano, 2 vol. 1921, 1922).

CHAPITRE VIII

MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS

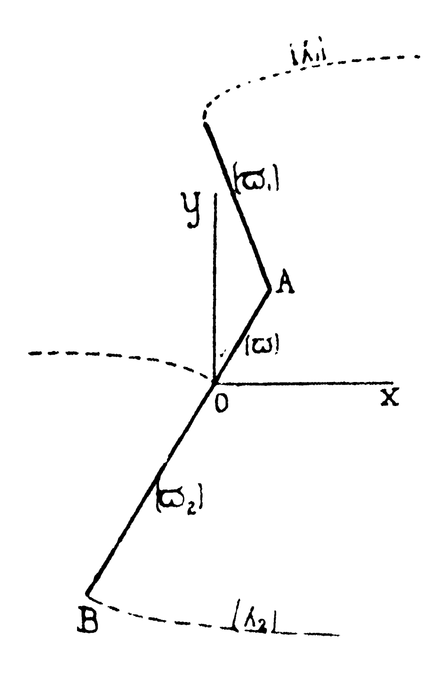
On a vu comment l'hypothèse d'un sillage permet de trouver pratiquement, en général, une solution du problème hydrodynamique de l'écoulement permanent d'un liquide rencontrant un solide donné. Il est extrêmement remarquable qu'une telle solution, — satisfaisant aux équations de l'Hydrodynamique, échappant au paradoxe de d'Alembert, fournissant des pressions partout positives et physiquement acceptables, — ne soit pas *unique*. Il peut, en effet, exister une infinité de telles solutions, dont le rôle physique n'est du reste pas le même, et dont nous verrons, en terminant, pour quelle raison on doit considérer l'un comme plus probable que l'autre, suivant les circonstances.

Voici comment on peut, sur un exemple particulièrement typique, mettre en indice ce fait essentiel (H. VILLAT, *Sur la détermination des problèmes de l'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides*, Annales de l'École Normale, 1914, pages 435-491).

Considérons le profil formé par deux lames rectilignes AB, AC, dont l'angle BAC forme un creux du côté d'où vient le le courant : comme partout dans ce qui précède, le courant est supposé horizontal et de vitesse 1, à l'infini à gauche.

En appliquant les résultats du chapitre VI, on peut aisément former une première solution correspondant au schéma indiqué par la figure ci-jointe. Le point O de bipartition du courant se trouve sur l'une ou l'autre des deux lames (ce n'est que tout à fait exceptionnellement qu'il coïncidera avec A). Nous le placerons pour fixer les idées sur AB, et nous appellerons $\alpha - \delta$ et $-\alpha - \delta$ les angles de AC et AB respectivement avec Ox (on a, d'après l'hypothése, $\pi < 2\alpha < 2\pi$). La fonction $\omega(\zeta)$ de la théorie générale sera fournie par la formule (86), ou (103), la partie réelle $\Phi(\sigma)$ étant tenue à prendre les valeurs :

$$
\begin{array}{lll}
-\alpha-\delta & \text{pour} & 0<\sigma<s_0 \\
\pi-\alpha-\delta & \text{pour} & s_0<\sigma<s_1 \\
\alpha-\delta & \text{pour} & s_1<\sigma<\pi
\end{array}
$$



e^{is_0} et e^{s_1}, sont les points qui correspondent à O et à A . Un calcul simple conduit ainsi à la fonction suivante :

$$
(120) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega(\zeta) = {} & i \log \frac{\zeta - e^{is_0}}{1 - \zeta e^{is_0}} \\ & + \frac{i}{2\pi}(2\alpha - \pi) \log \frac{\zeta - e^{is_1}}{1 - \zeta e^{is_1}} - (\delta + \alpha) \quad ; \end{aligned} \right.
$$

et la condition de régularité (87) donne la relation :

$$
(121) \qquad s_0 = \alpha - \delta - \frac{2\alpha - \pi}{\pi} s_1 \qquad (0 < s_0 \leqq s_1 < \pi).
$$

On achève sans peine les calculs, et l'on voit que, en plaçant au besoin le point O sur AC au lieu de AB , on peut, — les angles α et δ étant donnés — déterminer les constantes s_0 et s_1, liées par la relation précédente, de façon à donner au rapport $\frac{AC}{AB}$ la valeur que l'on voudra. Une homothétie convenable, correspondant au choix du facteur a^2 dans la formule (88), permettra ensuite d'assigner aux deux lames AB et AC des longueurs arbitrairement choisies d'avance.

Au reste, la solution correspondante est entièremrnt acceptable, les vitesses y sont partout inférieures à 1 ($\tau \leqq 0$) , car sur les parois ($\zeta = e^{is}$) on a $V = e^{\tau}$, avec :

$$\tau = -\log\left|\frac{e^{is} - e^{-is_0}}{e^{is} - e^{is_0}}\right| + \frac{\pi - 2\alpha}{\pi}\log\left|\frac{e^{is} - e^{-is_1}}{e^{is} - e^{is_1}}\right| ,$$

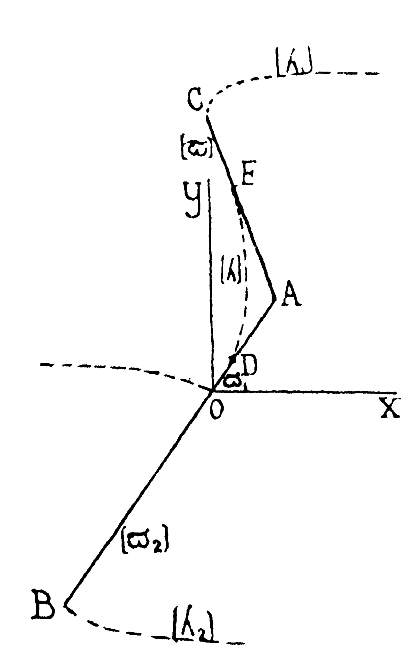
quantité toujours visiblement négative.

Mais on peut maintenant envisager une seconde sorte de solution répondant à la configuration du dessin ci-joint; une région de fluide mort occuperait le voisinage de l'angle A, et serait séparée du liquide en mouvement par une ligne de jet λ. Pour fixer les idées, le point de bifurcation du courant a été placé sur AB.

Dans le fluide en mouvement, nous poserons comme d'habitude :

$$f = \varphi + i\psi ,$$

en convenant de prendre $f = 0$ au point O. Les lignes λ_2, ϖ_2, ϖ_1, λ, ϖ, λ_1, appartiennent toutes à la ligne de courant



$\psi = 0$. Dans le sillage arrière, la pression est constante : $p = p_0$ partout ailleurs, dans le fluide en mouvement, on a :

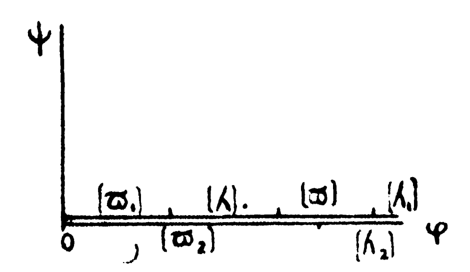
(122) $$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

C'est l'équation (81) du Chapitre VI. Dans la région morte DAE, la pression est aussi constante; l'équation (122) exige alors que V soit constant le long de λ, puisque la pression est nécessairement continue. Nous appellerons :

(123) $$V_1 = e^{-a}$$

cette vitesse, a étant une constante, nécessairement positive.

Au domaine occupé par le liquide *mobile*, il correspondra dans le plan f tout le plan, muni d'une coupure le long du demi-axe $O\varphi$, dans les conditions qu'indique la figure. Nous allons maintenant constater qu'au moyen des principes du Chapitre IV, nous pourrons effectuer la représentation conforme de ce domaine du plan f,



d'abord sur l'intérieur d'un rectangle, et ensuite sur l'aire d'une demi-couronne circulaire de telle manière que les parois solides, ϖ_1, ϖ_2 d'une part, ϖ d'autre part, aient leurs images sur les circonférences frontières, et que les lignes de jet, λ_1, λ_2 et λ, aient leurs images sur le diamètre qui limite la demi-couronne. Nous nous trouverons alors ramené à un problème que les résultats du Chapitre III nous permettront d'aborder.

Effectuons tout d'abord la transformation :

$$f = t'^2 \tag{124}$$

qui fait correspondre au plan f le demi-plan t' supérieur.

Appelons $t'_1\ t'_2\ t'_3\ t'_4$ les quatre points de séparation qui corres-

Plan t'

(λ₂) (ϖ₂) (ϖ₁) (λ) (ϖ) (λ₁)

t'₁ t'₂ t₃ t₄

pondent au passage d'un paroi solide sur une ligne de jet ou inversement; puis opérons la transformation :

$$t' - t'_4 = \frac{P}{t+h}, \tag{125}$$

P et h étant réels, et choisissons h de façon que $t_1 + t_2 + t_3 = 0$,

Plan t

(λ₁) (λ₂) t₁ (ϖ₂) (ϖ₁) t₂ (λ) t₃ (ϖ)

les notations se correspondant naturellement. On obtient alors dans le plan t la configuration suivante, où t'_4 correspond à $t_4 = \infty$.

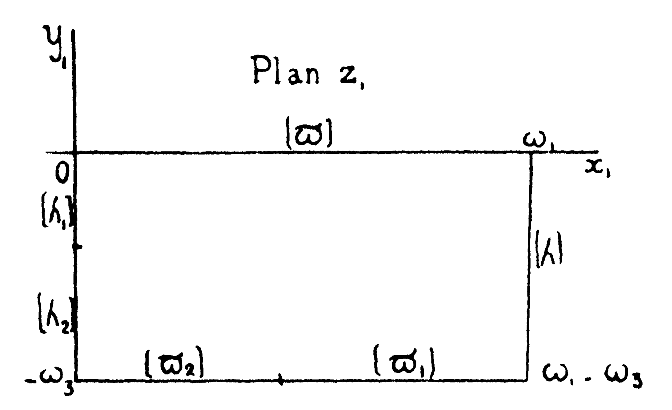
Envisageons maintenant la fonction elliptigue pz_1 construite au moyen des nombres (t'_1, t'_2, t'_3) jouant respectivement le rôle de (e_1, e_2, e_3) ; les formules (65) définiront les demi-périodes ω_1 et ω_3, et la formule :

(126) $$t = pz_1$$

fera correspondre au demi-plan t supérieur, l'aire du rectangle de la figure du plan z_1 . Enfin la transformation :

(127) $$z_1 = \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \omega_3$$

nous ramènera, ainsi qu'on le vérifie facilement, à la demi-couronne



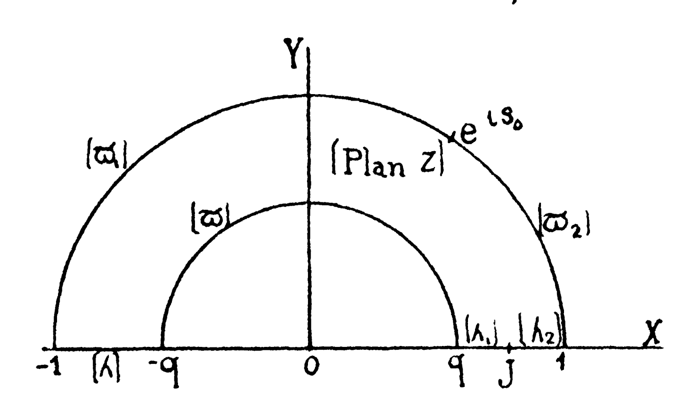
circulaire, de rayons 1 et q $\left(= e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}}\right)$ dans les conditions qu'indique le dessin ci-joint.

On posera maintenant, comme au Chapitre VI :

(128) $$w = \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}$$

(129) $$\Omega = \Theta + iT$$

de sorte que Θ représentera l'inclinaison de la vitesse sur l'axe OX,



et que cette vitesse sera donnée par :

(130) $$V = e^{T}$$

Ω sera une fonction de z, donc de f, et par suite de Z par l'intermédiaire des transformations ci-dessus. *Si cette fonction* $\Omega(Z)$ *était connue*, on en déduirait donc, par (128) :

(131) $$dz = e^{i\Omega(Z)} \frac{df}{dZ}\, dZ\,,$$

et l'on aura $\frac{df}{dZ}$ au moyen de (124), (125), (126), (127), d'où facilement :

(132) $$\left\{\begin{aligned} \frac{df}{dZ} = -\frac{2\omega_1 P}{i\pi Z} & \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right)}{\left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right) + h\right]^2} \\ & \left[\zeta_3 + \frac{P}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right) + h}\right]. \end{aligned}\right.$$

Et on déduira enfin de (131) l'expression de z en fonction de Z au moyen d'une quadrature que nous n'aurons, du reste, pas besoin d'expliciter.

Calcul de $\Omega(Z)$. — Il nous faut maintenant voir à quelles conditions est assujettie la fonction $\Omega(Z)$. Sa partie réelle, Θ, représente en chaque, point l'inclinaison du courant, donc avec les notations antérieures on doit avoir :

$$\begin{array}{llll} \Theta = -\alpha - \delta & \text{pour} & Z = e^{is}\,, & 0 < s < s_0 \\ \Theta = \pi - \alpha - \delta & \text{—} & \text{—} & s_0 < s < \pi \\ \Theta = \alpha - \delta & \text{pour} & Z = q\,e^{is}\,, & 0 < s < \pi \end{array}$$

Rappelons qu'on a toujours :

(133) $$\pi < 2\alpha < 2\pi.$$

Maintenant, sur λ_1 et λ_2, la vitesse du fluide est constante et égale à 1, donc on a :

$$T = 0 \quad \text{pour} \quad q < Z < 1.$$

Sur λ, nous avons vu que la vitesse était constante et égale à e^{-a} (éq. 123) donc :

$$T = -a \quad (a > 0) \quad \text{pour} \quad -1 < Z < -q.$$

Une fonction $\Omega(Z)$ satisfaisant à ces conditions concernant Θ et T peut se déduire immédiatement des formules générales que j'ai données dans un Mémoire (*Sur certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, Acta Mathematica, 1916, pages 101-178), mais elle résulte aussi, très facilement, des développements du Chapitre II. En effet, la fonction :

$$\Omega_1(Z) = \Omega(Z) + \frac{a}{\pi} \log Z \tag{133}$$

où l'on prend pour $\log Z$ sa détermination principale, sera *réelle sur l'axe réel* de la demi-couronne envisagée dans le plan Z. On peut donc la prolonger analytiquement par symétrie dans la demi-couronne inférieure qui complète la couronne entière, et l'on est ramené, pour calculer $\Omega_1(Z)$ à chercher une fonction dont la partie réelle prend des valeurs connues, et faciles à écrire explicitement sur les circonférences frontières (considérées dans leur entier). La constante arbitraire, imaginaire pure, qui intervient dans la formule générale (29) à appliquer, se trouve ici déterminée par le fait que $\Omega_1(Z)$ doit être réel sur l'axe réel.

On trouve ainsi, grâce à un calcul simple que le lecteur rétablira aisément, d'abord $\Omega_1(Z)$, puis, par (133) :

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega(Z) = i \log & \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \\ & + \left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}\right) \log Z + \pi - \alpha - \delta. \end{aligned} \right. \tag{134}$$

On choisit pour la détermination de $\log \frac{\sigma(\;\;)}{\sigma(\;\;)}$ celle qui est égale à $i\pi$ pour $Z = 1$, et que l'on suit par continuité dans la demi-couronne.

La condition d'uniformité (10) de la fonction $\Omega_1(Z)$ impose ici la relation :

$$\pi - 2\alpha - s_0 + a \frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0 , \tag{135}$$

c'est ce qu'on voit immédiatement, puisque la partie réelle de Ω_1 est égale à celle de Ω sur la circonférence $|Z| = 1$, et à

$$\left(\alpha - \delta + \frac{a}{\pi} \log q\right)$$

sur la circonférence $|Z| = q$.

Il nous faut maintenant nous assurer que la solution ainsi construite est acceptable. Pour cela, il suffit évidemment de nous assurer :

1° Que les lignes λ_1 et λ_2 sont concaves vers le sillage, car alors elles ne se recouperont pas.

2° Que la ligne λ est concave vers le courant; alors, elle permettra l'existence des deux parois solides DA et AE ;

3° Que la vitesse dans le fluide soit partout ≤ 1, c'est-à-dire que T ne soit jamais positif. Pour des raisons déjà expliquées, il suffit de s'assurer que T n'est jamais positif sur les parois solides ϖ, ϖ_1 et ϖ_2.

Nous allons vérifier ces trois conditions, grâce auxquelles il est clair que le domaine construit *a posteriori* dans le plan z au moyen de la formule (131) sera d'un seul tenant.

Condition 1°. — Sur λ_1 et λ_2, on a $\Theta = \Omega(Z)$ $(q < Z < 1)$ et les valeurs limites de Θ sont déjà connues. On a, en outre :

$$(136)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{dZ} = \dfrac{\omega_1}{\pi Z}\left[\zeta\left(\dfrac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right. \\ \left. -\zeta\left(\dfrac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right) + \dfrac{2\eta_1}{\pi}s_0 - \dfrac{a}{\omega_1}\right] = \dfrac{1}{\pi Z}\,U(Z). \end{cases}$$

La dérivée de $U(Z)$ garde un signe constant, car elle est égale à la quantité (réelle) :

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{\omega_1}{i\pi Z}\left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right]$$

et celle-ci est évidemment continue dans l'intervalle $(q, 1)$, et ne s'y annule pas car les arguments des deux fonctions p restent distincts sans que leur différence puisse devenir une période. De tout ceci résulte que l'angle Θ sera toujours *décroissant* ainsi que l'exige le sens de la concavité, si les valeurs extrêmes de Ω sont négatives, c'est-à-dire si l'on a :

$$(137)\qquad -2\zeta\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1}{\pi}s_0 - \frac{a}{\omega_1} \leq 0$$

et

$$-\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_3\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \omega_3\right) + \frac{2\eta_1}{\pi}s_0 - \frac{a}{\omega_1} \leq 0$$

D'après la troisième équation (49), ceci s'écrira :

$$(138) \qquad -2\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1}{\pi} s_0 - \frac{a}{\omega_1} \leq 0.$$

D'autre part, d'après l'équation (50) on peut écrire :

$$\zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \zeta \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = \frac{1}{2} \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} s_0}{p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3} < 0 ,$$

de telle sorte que l'inégalité (138) entraîne l'inégalité (137), et qu'il suffit de conserver l'unique condition (138).

Condition 2°. — Sur la ligne de jet λ, on a $-1 < Z < -q$. Nous poserons $Z = -\rho \; (q < \rho < 1)$. En utilisant les formules (45) on aura sans peine pour Θ :

$$\Theta = i \log \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}$$
$$+ \left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}\right) \log \rho + \pi - \alpha - \delta.$$

Il nous faut écrire que $\Theta(\rho)$ *décroit* quand ρ croît, c'est-à-dire quand on décrit λ dans le sens ED. Comme ci-dessus*, nous trouverons que $\frac{d\Theta}{d\rho}$ varie toujours dans le même sens, entre deux valeurs limites qui sont, à un facteur positif près :

$$-2\zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1}{\pi} s_0 - \frac{a}{\omega_1}$$

et

$$-2\zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1}{\pi} s_0 - \frac{a}{\omega_1}.$$

Il suffit donc que ces deux expressions soient négatives ou nulles, ce qui fournit une seule inégalité à retenir :

$$(139) \qquad -2\zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\eta_1}{\pi} s_0 - \frac{a}{\omega_1} \leq 0$$

---

* Bien entendu, pour la dérivation d'une fonction telle que $\zeta_1 u$, il suffira de faire usage de la première équation (49) pour être ramené à la fonction $\zeta(u+\omega_1)$, dont la dérivée est $-p(u+\omega_1)$.

à cause de la formule (51), écrite sous la forme :

$$\zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = \frac{e_1 - e_2}{2} \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_1\right)\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_2\right)}$$

et où le second membre est évidemment négatif.

Maintenant l'inégalité analogue :

$$\zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \zeta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = \frac{e_1 - e_3}{2} \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_1\right)\left(p \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_3\right)} < 0$$

montre que la condition (138) est elle-même une conséquence de (139), seule condition qu'en définition il nous faille jusqu'ici conserver.

Condition 3°. — Il faut ici nous inquiéter du signe de T sur les parois solides. Plaçons-nous sur ϖ_1 ou ϖ_2, $Z = e^{is}$ $(0 < s < \pi)$. On trouve immédiatement que le valeur de T est :

$$T(s) = \log \left| \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)} \right| + \left(\frac{2\,\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} \right) s.$$

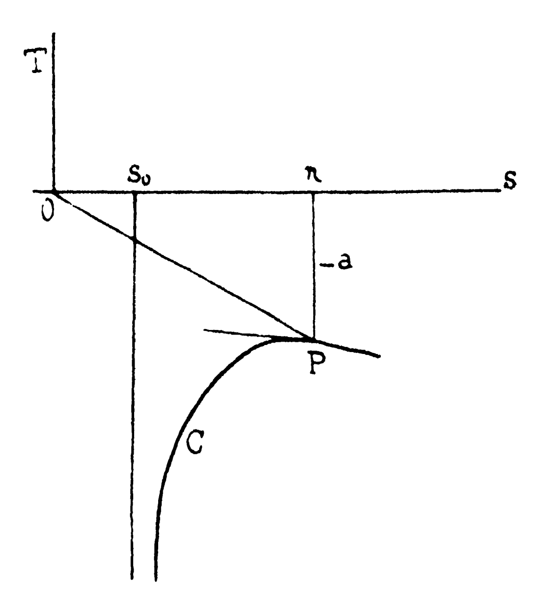
On a ensuite :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\omega_1}{\pi} \left[\zeta \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) - \zeta \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0) \right] + \frac{2\,\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}$$

$$\frac{d^2T}{ds^2} = - \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \left[p \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) - p \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0) \right].$$

Cette dérivée seconde est toujours négative ; $\frac{dT}{ds}$ décroît donc, et ses valeurs aux limites pour $s = 0$ et $s = \pi$, sont négatives d'après les conditions (137) et (139) déjà écrites (il fallait s'y attendre, car ce fait n'est autre que celui qu'indique une formule (1') écrite ici sous la forme $\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial s}$, si n désigne la normale *extérieure* au domaine). Quoi qu'il en soit, T va donc décroître dans l'intervalle (O, s_0) (s_0 est un point de discontinuité) ; dans cet intervallle, T sera donc négatif, car $T(0) = 0$. — Dans l'intervalle (s_0, π), T part de $-\infty$, passe par un maximum et parvient à la valeur

négative $-a$; le sens de la concavité de la courbe représentative est vers le bas, la portion de courbe C en question est donc située



entièrement au-dessous de la tangente au point terminal P. Or, la pente de cette tangente est :

$$m = -\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi},$$

nombre évidemment négatif. La pente de la droite OP est, d'autre part $-\frac{a}{\pi}$, et l'on a :

$$m + \frac{a}{\pi} = -\frac{2\omega_1}{\pi}\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\eta_1}{\pi}s_0\right)$$

Or, nous avons démontré au Chapitre III (formule 52) que la quantité entre parenthèses était *négative*, donc on a :

$$m > -\frac{a}{\pi}.$$

La portion de courbe C envisagée reste donc constamment au-dessous de OP, et par suite T reste aussi constamment négatif ou nul sur ϖ_1 et ϖ_2.

On s'assure ensuite, sans aucune peine, que les conditions déjà écrites suffisent pour que T soit également négatif ou nul, tout le long de la ligne ϖ $(Z = q\,e^{is},\ 0 < s < \pi)$.

Résumé des conditions à satisfaire. — En définitive, nous aurons le tableau suivant des égalités ou inégalités auxquelles doivent satisfaire les constantes introduites dans les équations :

$$(140)\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi < 2\alpha < 2\pi \; ; \qquad 0 < \alpha \pm \delta < \pi \\ a > 0 \; ; \qquad 0 < s_0 < \pi \\ \pi - 2\alpha - s_0 + \dfrac{a\,\omega_3}{i\,\omega_1} = 0 \\ -2\zeta_1 \dfrac{\omega_1}{\pi} s_0 + \dfrac{2\eta_1}{\pi} s_0 - \dfrac{a}{\omega_1} \leq 0 \end{array} \right.$$

auxquelles il faudra joindre la relation qui exprime que pour $Z = j$ (point de séparation entre λ_1 et λ_2 sur le plan Z) la vitesse est horizontale : $\Theta = 0$; c'est cette condition qui *oriente* le courant liquide.

Il faudrait même ajouter, si la double lame est donnée, que les deux longueurs AB et AC, calculées au moyen de (131), doivent être égales à des longueurs données.

Ceci posé, laissons de côté pour l'instant les conditions concernant ces deux longueurs; donnons-nous ω_1 et ω_3, et posons :

$$(141)\qquad \mathfrak{X} = \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \,, \qquad \mathfrak{Y} = \frac{a}{2\,\omega_1} \;;$$

les deux dernières conditions (140) deviennent :

$$(142)\qquad \mathfrak{Y} = \frac{i}{2\,\omega_3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\mathfrak{X} + 2\alpha - \pi\right)$$

$$(143)\qquad \mathfrak{Y} \geq -\zeta_1 \mathfrak{X} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{X} .$$

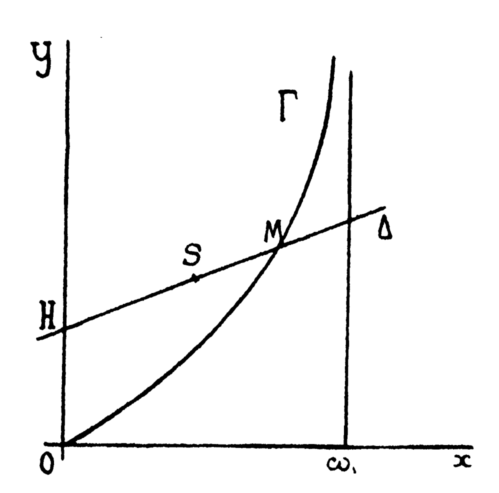
Construisons maintenant la courbe Γ, d'équation :

$$\mathfrak{Y} = -\zeta_1 \mathfrak{X} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{X},$$

dans l'intervalle $(0 , \omega_1)$ pour $\mathfrak{X}$. On constate aisément que cette courbe a la forme qu'indique la figure; en utilisant (49), on voit de suite que la pente de la tangente en O est $e_1 + \dfrac{\eta_1}{\omega_1}$, nombre que nous savons être positif (éq. 53).

Donnons-nous maintenant les angles α et δ, satisfaisant aux inégalités (140) requises, et prenons sur OY un point H, d'ordonnée positive $\dfrac{i\,(2\alpha - \pi)}{2\,\omega_3}$; par ce point, menons la droite $H\Delta$

de pente $\frac{i\pi}{2\,\omega_1\,\omega_3}$; cette droite rencontrera Γ en un point M . Il suffira alors de placer le point S de coordonnées $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sur



le segment HM , pour que les nombres $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ satisfassent à toutes les conditions imposées.

Les valeurs de s_0 et de a en résulteront.

Il est alors aisé de constater que la condition, non encore explicitée, $\Theta(j) = 0$, qui exprime l'horizontalité du courant à l'infini, détermine alors le nombre j , entre q et 1 . En effet, on a :

$$\Theta(j) = \Omega(j) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log j - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log j + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

$$+ \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log j + \pi - \alpha - \delta$$

ou bien :

$$\Theta(j) = G(\log j) + \pi - \alpha - \delta,$$

en posant :

$$G(t) = i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}t - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}t + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)t.$$

Or, on voit que $G(t)$ décroît constamment, pour $\log q < t < 0$, entre les valeurs limites suivantes : pour $t = 0$, $\log \frac{\sigma(\ )}{\sigma(\ )} = i\pi$, $G(0) = -\pi$. Pour $t = \log q = -\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}$, on a :

$$G(\log q) = i \log \frac{\sigma\left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\omega_1 + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\left(\frac{-\pi \omega_3}{i \omega_1}\right).$$

Mais on a (formules 21) :

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_3\right) = \sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \omega_3 + 2\omega_3\right) = -e^{2\eta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \omega_3\right),$$

d'où :

$$G(\log q) = i \log \left(e^{-2\eta_3 \frac{\omega_1}{\pi} s_0} \right) + \frac{2 i \eta_1 \omega_3}{\pi} s_0 + \frac{a \omega_3}{i \omega_1},$$

c'est-à-dire, d'après la relation fondamentale (19) :

$$\left[\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2}\right]$$

et d'après la condition (135) :

$$G(\log q) = -s_0 + \frac{a \omega_3}{i \omega_1} = 2\alpha - \pi.$$

Par suite, nous voyons que $G(t)$ varie en décroissant entre les valeurs $2\alpha - \pi$ et $-\pi$, elle prend donc une fois et une seule la valeur $-\pi + \alpha + \delta$, et par conséquent l'équation :

$$\Theta(j) = 0$$

a une racine j et une seule dans l'intervalle indiqué.

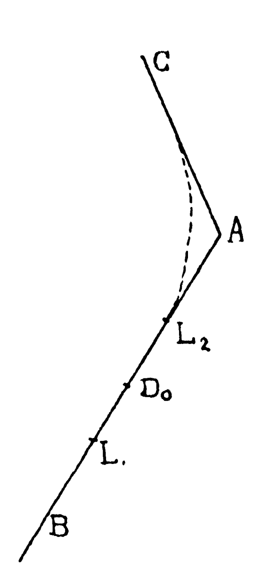
La *multiplicité* des solutions acceptables pour un même obstacle est alors dès maintenant démontrée. En effet, construisons la solution qui correspond au point S choisi sur la droite HM, et à des angles α et δ donnés ; calculons les longueurs AB et AC des lames correspondantes. Puis, pour l'obstacle BAC ainsi construit, formons la solution de première espèce qui correspond aux calculs du début du présent Chapitre, et pour laquelle le courant suit constamment les profils sur AB et sur AC sans s'écarter des lames et sans éviter le sommet A. Nous avons constaté que cela était possible avec des lames de longueurs et d'orientations données.

Nous avons ainsi construit *deux* solutions pour le même solide BAC.

Il est du reste à peu près évident qu'il y en aura une infinité,

puisque nous pouvons dans les opérations précédentes choisir le point S d'une infinité de manières; mais il faut montrer comment on peut s'arranger pour obtenir toujours le même solide, avec deux lames ayant toujours les mêmes longueurs et les mêmes orientations. Je renverrai pour ce point le lecteur à la belle Thèse de M. R. Thiry (*Annales de l'École Normale*, 1921).

Il est très difficile de dire quelle est, *a priori*, des solutions possibles, celle qu'il faut considérer comme la meilleure, ou la plus probable. On trouvera dans la Thèse de M. Thiry (p. 38) d'intéressants développements. Il est assez probable que toutes les solutions trouvées sont acceptables; si l'on a réalisé, par exemple, la configuration pour laquelle il n'y a pas de plage morte au voisinage du point A, la moindre aspérité ou irrégularité physique de la paroi OA (en supposant le point de bifurcation sur AB) suffira pour agir à la manière d'un petit obstacle supplémentaire, en faisant naître une ligne de jet λ à partir de l'aspérité en question. Sur AB, il existe un point D_0 qui correspond au départ de la ligne λ dans le cas où le point S de la théorie précédente se trouve placé sur Γ au lieu d'être à gauche de cette courbe. Si, alors, la petite aspérité envisagée est placée en L_1 sur BD_0, elle donnera lieu à une très petite perturbation, localisée au voisinage même de cette aspérité, sous la forme d'une petite masse de liquide placée à l'arrière, et ne participant pas au mouvement général. Si, au contraire, la petite aspérité se place en L_2 sur D_0A, elle donnera lieu à une perturbation très notable, avec une ligne de jet qui ira se raccorder avec AC; quand bien même l'aspérité deviendrait infiniment petite et disparaîtrait entièrement, la perturbation dans le liquide subsisterait toujours d'une façon finie, alors qu'il n'en serait pas de même dans le premier cas.



Il semble donc résulter de ces considérations que, pour un solide parfaitement poli, c'est le cas limite *sans ligne* λ qui a le plus de chance de se produire. Pour un solide à bords rugueux, la plage de fluide inerte tendra, au contraire, à se former, et sans doute le plus tôt possible. On aura alors affaire au cas limite où le sillage part du point critique D_0.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces sortes d'interminations, ni sur d'autres dont on trouvera l'exposé détaillé dans les travaux cités dans le présent Chapitre.

CHAPITRE IX

RAPPEL DES ÉQUATIONS DES FLUIDES VISQUEUX

Nous voulons, dans les Chapitres qui vont suivre, examiner les propriétés et particularités du mouvement d'un fluide parfait, comme provenant à la limite de celles qui interviennent pour un fluide visqueux, dont la viscosité supposée très faible tendrait vers zéro. Cette manière de faire doit pouvoir mettre en évidence quelles seront les conditions aux limites les plus naturelles à adopter pour obtenir une représentation, au moyen du fluide parfait, qui fournisse une bonne approximation pour la réalité physique.

Il nous faudra donc utiliser les équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux, équations dont nous allons rappeler très rapidement comment on les établit, de façon à ce que le lecteur ait présentes à l'esprit les hypothèses qui leur servent de point de départ.

Étant donné dans la masse fluide un élément ayant la forme d'un disque très mince dont les deux faces parallèles s et s' soient réunies par un cylindre, nous orienterons chaque face au moyen de la normale vers l'extérieur du disque, et nous appellerons F et F' les efforts rapportés à l'unité de surface, qui s'exercent sur s et s' de la part de tout le fluide adjacent. Les efforts F et F' sont évidemment opposés, car les forces extérieures et les forces d'inertie appliquées à notre disque sont de l'ordre du volume, et les efforts intérieurs $F . s$ et $F' . s'$ sont de l'ordre de la surface s. Or l'ensemble de toutes ces forces doit être en équilibre.

En un point $M (x y z)$ nous imaginerons trois petites surfaces planes, orientées respectivement par ox, oy, oz. Nous appellerons X_x, Y_x, Z_x, les projections sur les troix axes des coordonnées, de l'effort unitaire exercé sur la face normale à ox. X_y, Y_y, Z_y ; X_z, Y_z, Z_z, définiront de même les efforts sur les deux autres surfaces.

Ceci posé, envisageons un petit parallélipipède de dimensions dx, dy, dz, ayant son centre en $M(x, y, z)$, et appliquons le théorème des moments par rapport à l'axe parallèle à ox, passant en M. Les efforts internes appliqués sur les faces donnent la contribution $-dy\,(dx\,dz\,Y_z) + dz\,(dx\,dy\,Z_y) = (Z_y - Y_z)\,dx\,dy\,dz$, de l'ordre de grandeur du volume du petit élément. Le moment des forces d'inertie et des forces extérieures sont évidemment d'un ordre de grandeur beaucoup plus faible.

Donc on a

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x\,;$$

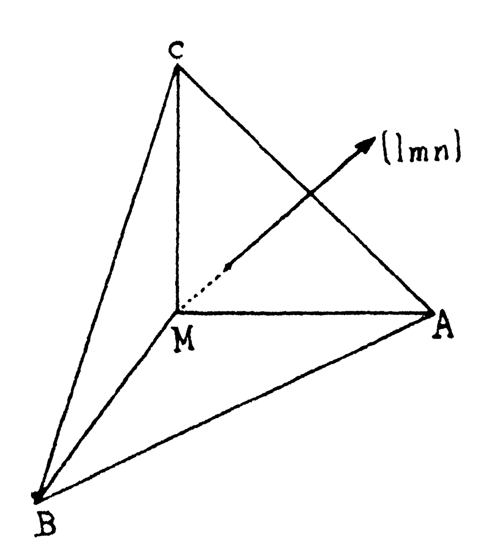
le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix}$$

est symétrique. On le notera, avec Lamé, en changeant l'écriture de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{vmatrix}$$

La considération d'un petit élément fluide ayant la forme d'un tétraèdre de sommet M, et d'arêtes parallèles aux axes ox, oy, oz,



donne immédiatement les équations suivantes : on n'aura à retenir, pour les mêmes raisons que ci-dessus, que les efforts sur les petites surfaces limites ; en projection sur ox, ces efforts auront pour valeurs, en appelant l, m, n, les cosinus directeurs de la normale à la face $S = ABC$ vers l'extérieur,

$$- l\,SX_x, \qquad - m\,SX_y, \qquad - n\,SX_z, \qquad SX_1$$

On a donc, $X_1\ Y_1\ Z_1$ désignant l'effet unitaire sur un élément de de surface orienté par (l, m, n) au point M :

$$(144)\quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = l X_x + m X_y + n X_z = l N_1 + m T_3 + n T_2 \\ Y_1 = l Y_x + m Y_y + n Y_z = l T_3 + m N_2 + n T_1 \\ Z_1 = l Z_x + m Z_y + n Z_z = l T_2 + m T_1 + n N_3 \end{array} \right.$$

L'effort $(X_1\ Y_1\ Z_1)$ est donc perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la normale à l'élément, par rapport à la *quadrique directrice* :

$$(145)\quad N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 + 2T_1\eta\zeta + 2T_2\zeta\xi + 2T_3\xi\eta = \pm 1.$$

On va maintenant chercher à relier les coefficients N et T , fonctions en général de (x, y, z) et du temps t , aux dérivées de la vitesse $(u\ v\ w)$ [fonction des mêmes variables], de la molécule fluide qui passe au point M à l'instant t .

La vitesse du point voisin M′ $(x + \delta x,\ \ y + \delta y,\ \ z + \delta z)$ au même instant t , a des projections telles que

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z\ ;$$

la vitesse *relative*, de M′ par rapport à M , est donc

$$(146)\qquad \frac{\partial u}{dx}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z\ ; \quad \ldots\ldots\ ; \quad \ldots\ldots$$

Il est à peu près évident que les forces de viscosité, — c'est-à-dire les forces internes qu'il faut ajouter à la pression intérieure des fluides parfaits, pour obtenir les efforts généraux ci-dessus, — dépendent des vitesses relatives ; et de plus, que tout mouvement d'ensemble du fluide (à la façon d'une masse solide) n'a aucune influence sur ces forces de viscosité (ou de frottement). Or un déplacement d'ensemble pour les points de coordonnées relatives $\delta x,\ \delta y,\ \delta z$, autour des points (x, y, z) est défini par des compoposantes de la forme $u_0 + \eta\,\delta z - \zeta\,\delta y$, ... , ... ; $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ n'ont aucun intérêt, mais $(\xi\,\eta\,\zeta)$ permettant de réduire à *six* le nombre des dérivées de (u, v, w) appelées à jouer un rôle dans les calculs : on peut prendre $(\xi\,\eta\,\zeta)$ comme on voudra sans changer le frottement intérieur. On prendra avec Stockes la définition du *tourbillon* (cf. *Un Cours quelconque de Mécanique Rationnelle*).

$$(147)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \eta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Moyennant quoi les composantes (146) de la vitesse relative prendront immédiatement la forme

$$(148)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z \\ + \eta\,\delta z - \zeta\,dy \ ; \ \ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les termes indépendants de $\xi\,\eta\,\zeta$ dans ces expressions définissent la *déformation pure*.

Les six nombres

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \frac{\partial w}{\partial z}\,,\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

portent le nom de composantes de la *vitesse de déformation* au point $(x\,y\,z)$, pour la raison que voici.

La distance, à l'instant t, des deux points voisins M et M′ est fournie par

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 \ .$$

Au bout du temps dt, ces deux points sont devenus : le premier, M_1 : $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$; le second, M'_1 :

$$x + \delta x + (u + \delta u)\,dt = x + u\,dt + \delta x$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z\right)dt \ ; \ \ldots\ldots \ ; \ \ldots\ldots$$

La distance $M_1\,M'_1 = \delta s'$ est donc donnée par

$$\delta s'^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}dt\ .\ \delta y \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}dt\,\delta z\right]^2 + [\ldots\ldots]^2 + [\ldots\ldots]^2$$

c'est-à-dire qu'en négligeant dt^2 on aura

$$(149)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta s'^2 - \delta s^2 = 2\,dt \Big[& \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\,\delta z^2 \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta y\,\delta z + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta z\,\delta x \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta x\,\delta y \Big]. \end{aligned} \right.$$

On voit maintenant de suite que, pour un petit parallélipipède de sommet M, et de dimensions a, b, c, parallèles aux axes

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

sont les *vitesses d'allongement* des côtés. Car en prenant par exemple M et M' aux deux extrémités de l'arête parallèle à ox, et appelant a' à la distance des deux points tranformés, on a par l'équation (149) :

$$a'^2 - a^2 = 2\,dt\,.\,\frac{\partial u}{\partial x}\,a^2\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a' - a}{a\,dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

en négligeant toujours dt^2 devant dt.

De même les coefficients des termes rectangles sont les *vitesses* de glissement, avec lesquelles se modifient les angles des arêtes du parallélipipéde, deux à deux. En effet les projections sur les trois axes, des arêtes a et b placées en M, seront, à l'instant t :

$$a,\, o,\, o\;; \qquad o,\, b,\, o\;;$$

et après la déformation elles sont devenues :

$$a\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right),\quad a\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dt\,,\quad a\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dt\;;$$

$$b\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dt\,,\quad b\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,dt\right),\quad b\,\frac{\partial w}{\partial y}\,dt\,.$$

L'angle

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_z\right)$$

des deux nouvelles arêtes a', b', sera donc donné par

$$a' b' \sin \varepsilon_z = ab \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt ,$$

ou encore

$$\frac{\varepsilon_z}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ,$$

toujours au même degré d'approximation.

Enfin notons que la quantité

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{150}$$

porte le nom de *dilatation cubique*; elle représente, par un calcul analogue aux précédents la vitesse d'augmentation du volume du petit parallélipipède de tout à l'heure.

Ellipsoïde de déformation. — Une petite sphère de centre M à l'instant t, devient, autemps $t + dt$, un petit *ellipsoïde* dont l'équation sera fournie par (149), en y changeant simplement le signe de dt de façon que $\delta s'$ se rapporte à l'instant initial, et δs à l'instant final; en supposant $\delta s' = r$, nous aurons l'équation de l'*ellipsoïde de déformation* correspondant à la sphère de rayon r sous la forme

$$r^2 = \delta x^2 \left[1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right] + \ldots\ldots \quad - 2 \left(\frac{dw}{dy} + \frac{\partial v}{\delta z} \right) dt \,.\, \delta y \, \delta z \ \ldots\ldots$$

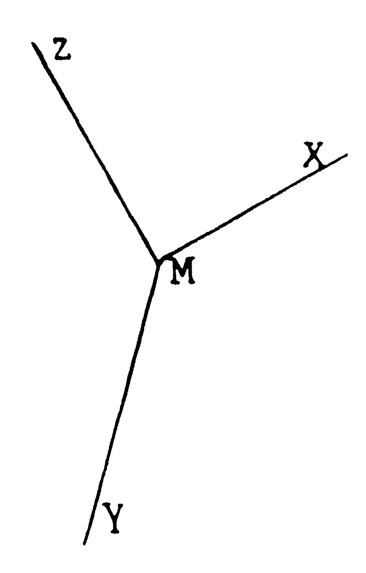
Il y a donc en chaque point un tel ellipsoïde, lequel possède naturellement au moins un trièdre trirectangle de directions principales, trièdre qui reste trirectangle par la suite, après la déformation. Si donc on rapporte la déformation à ces trois *directions principales* M X Y Z, prises comme axes, les *glissements seront nuls*; c'est-à-dire que, U V W, représentant les projections de la vitesse $(u\ v\ w)$ sur ces axes particuliers, on n'aura plus que trois composantes de déformation non nulles, à savoir :

$$\frac{\partial U}{\partial X} , \quad \frac{\partial V}{\delta Y} , \quad \frac{\partial W}{\partial Z} ;$$

les trois dernières étant nulles, ce qui donne

$$\frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \,. \tag{151}$$

Or, dans un paragraphe antérieur nous avons obtenu l'équation (145) de la quadrique directrice par rapport aux plans principaux de laquelle les efforts internes se placent symétriquement. Comme, ainsi



qu'il résulte de l'expérience, les forces de viscosité ne dépendent que des vitesses de déformation, les plans principaux de nos deux quadriques *coïncident* nécessairement. Et, en adoptant, pour l'instant, au point M, ce trièdre M X Y Z comme trièdre de référence, nous écrirons les coefficients de Lamé, — ici au nombre de trois seulement non nuls : $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$, — en les développant par la formule de Marc Laurin et *supposant que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur au premier* par rapport aux vitesses de déformation.

Nous obtenons ainsi

$$(152) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= A_1 + \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial X} + \beta_1 \frac{\partial V}{\partial Y} + \gamma_1 \frac{\partial W}{\partial Z} \\ \mathcal{N}_2 &= A_2 + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial X} + \beta_2 \frac{\partial V}{\partial Y} + \gamma_2 \frac{\partial W}{\partial Z} \\ \mathcal{N}_3 &= A_3 + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial X} + \beta_3 \frac{\partial V}{\partial Y} + \gamma_3 \frac{\partial W}{\partial Z} \end{aligned} \right.$$

Or s'il y avait équilibre, et par conséquent si les vitesses de déformation étaient nulles, les efforts intérieurs se réduiraient à la simple pression normale p ; il en résulte donc que nécessairement on a

$$A_1 = A_2 = A_3 = -p$$

et il vient

$$(153)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = -p + \alpha_1 \dfrac{\partial U}{\partial X} + \beta_1 \dfrac{\partial V}{\partial Y} + \gamma_1 \dfrac{\partial W}{\partial Z} \\ \mathfrak{N}_2 = -p + \alpha_2 \dfrac{\partial U}{\partial X} + \ldots\ldots \\ \mathfrak{N}_3 = -p + \alpha_3 \dfrac{\partial U}{\partial X} + \ldots\ldots \end{cases}$$

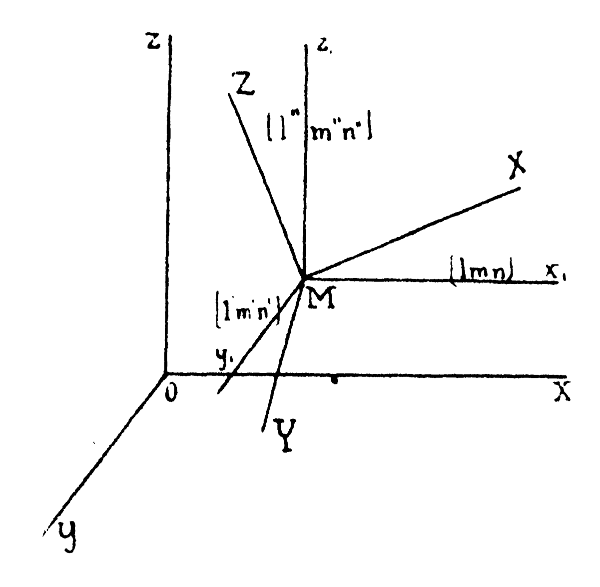
Supposons maintenant, ce qui est évidemment le cas général pour les fluides naturels, que le fluide soit isotrope : il n'y a aucune différence spécifique entre les trois directions principales. En échangeant X avec Y , puis en faisant des permutations circulaires, on obtient ainsi les conditions, permettant de réduire le nombre des coefficients à deux :

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \lambda + 2\mu \quad , \quad \alpha_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \gamma_2 = \lambda$$

D'où finalement les relations

$$(154)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = -p + \lambda\Theta + 2\mu \dfrac{\partial U}{\partial X} \\ \mathfrak{N}_2 = -p + \lambda\Theta + 2\mu \dfrac{\partial V}{\partial Y} \quad \text{avec } \Theta = \dfrac{\partial U}{\partial X} + \dfrac{\partial V}{\partial Y} + \dfrac{\partial W}{\partial Z} \\ \mathfrak{N}_3 = -p + \lambda\Theta + 2\mu \dfrac{\partial W}{\partial Z} \end{cases}$$

Si enfin il s'agit d'un fluide homogène, c'est-à-dire identique dans toutes ses parties les coefficients λ et μ seront les mêmes partout, ce seront des constantes (coefficients de viscosité).



Des formules (154), établies pour les axes particuliers M X Y Z, il est très facile maintenant de déduire les expressions qui conviennent

lorsque les axes ont les directions quelconques concernant nos calculs initiaux. La figure ci-jointe montre les cosinus directeurs des directions ox, oy, oz, par rapport aux axes $MXYZ$.

Les formules (144) appliquées à l'élément situé en M et orienté par ox, donnent immédiatement (en les utilisant par rapport au trièdre $MXYZ$),

$$X_x = l\,\mathfrak{N}_1 , \quad Y_x = m\,\mathfrak{N}_2 , \quad Z_x = n\,\mathfrak{N}_3 ;$$

Par suite les composantes, sur ox, oy, oz, de la même force exercée sur l'élément normal à ox, sont

$$\begin{aligned} N_1 &= l\,X_x + m\,Y_x + n\,Z_x = l^2\,\mathfrak{N}_1 + m^2\,\mathfrak{N}_2 + n^2\,\mathfrak{N}_3 \\ T_3 &= l'\,X_x + m'\,Y_x + n'\,Z_x = ll'\,\mathfrak{N}_1 + mm'\,\mathfrak{N}_2 + nn'\,\mathfrak{N}_3 \\ T_2 &= l''\,X_x + \quad \ldots\ldots \quad = ll''\,\mathfrak{N}_1 + mm''\,\mathfrak{N}_2 + nn''\,\mathfrak{N}_3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(155) \quad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \lambda\Theta - p + 2\mu\left[l^2 \frac{\partial U}{\partial Y} + m^2 \frac{\partial V}{\partial Y} + n^2 \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \\ T_3 &= 2\mu\left[ll' \frac{\partial U}{\partial X} + mm' \frac{\partial V}{\partial Y} + nn' \frac{\partial W}{\partial V} \right] \\ T_2 &= 2\mu\left[ll'' \frac{\partial U}{\partial X} + mm'' \frac{\partial V}{\partial Y} + nn'' \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \end{aligned} \right.$$

Mais les formules de transformation évidentes, telles que

$$\begin{aligned} X &= l\,x + l'y + l''z , \quad \ldots\ldots , \quad \ldots\ldots \\ u &= l\,U + m\,V + n\,W , \quad \ldots\ldots , \quad \ldots\ldots , \end{aligned}$$

donnent de suite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\,l + \frac{\partial u}{\partial Y}\,m + \frac{\partial u}{\partial Z}\,n = l\left(l\,\frac{\partial U}{\partial X} + m\,\frac{\partial V}{\partial X} + n\,\frac{\partial W}{\partial X}\right)$$
$$+ m\left(l\,\frac{\partial U}{dY} + m\,\frac{\partial V}{\partial Y} + n\,\frac{\partial W}{\partial Z}\right) + n\left(l\,\frac{\partial U}{\partial Z} + m\,\frac{\partial V}{\partial Z} + n\,\frac{\partial W}{\partial Z}\right)$$

c'est-à-dire à cause de (151)

$$(156) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = l^2\,\frac{\partial U}{\partial X} + m^2\,\frac{\partial V}{\partial Y} + n^2\,\frac{\partial W}{\partial Z} ; \\ &\text{on trouve de même} \\ &\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\left(l'\,l''\,\frac{\partial U}{\partial X} + m'\,m''\,\frac{\partial V}{\partial Y} + n'\,n''\,\frac{\partial W}{\partial Z}\right), \end{aligned} \right.$$

et toutes les formules semblables.

Une conséquence immédiate est que

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z},$$

ce qui était du reste évident par avance à cause de la signification invariante de l'expression θ. En fin de compte, portant dans les formules (155), celles-ci se réduisent à

$$(157) \left\{ \begin{array}{ll} N_1 = -p + \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ N_2 = -p + \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & T_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ N_3 = -p + \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial y} & T_3 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \multicolumn{2}{c}{\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.} \end{array} \right.$$

Équations générales du mouvement. — Ceci posé, les équations du mouvement d'une particule fluide s'établissent comme d'habitude; en supposant une particule parallélipipédique placée au point M à l'instant t, ses dimensions étant dx, dy, dz, on voit tout de suite que les efforts exercés sur les faces du parallélipipède ont pour projection totale sur l'axe ox :

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

De sorte que si ρ désigne la densité au point M, (J_x, J_y, J_z) l'accélération de la molécule qui passe en ce point à l'instant t, et si enfin $(\rho X_e, \rho Y_e, \rho Z_e)$, sont les projections de la résultante des forces extérieures, rapportée à l'unité de volume, on aura les équations générales de la dynamique

$$(158) \left\{ \begin{array}{l} \rho J_x = \rho X_e + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

D'ailleurs, les composantes de l'accélération étant

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt},$$

et par suite

$$J_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\ , \ \ldots\ldots,\ \ \ldots\ldots,$$

on en conclut les équations

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$= \rho X_e + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \ \ldots\ldots$$

qui à cause de (157) se mettront finalement sous la forme

(159)
$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho X_e \\ = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,. \end{array}\right.$$

A ces équations il conviendra d'ajouter :

1° L'équation de continuité, en supposant qu'il ne se forme pas de cavitations dans le même fluide, autrement dit en supposant que le fluide reste bien continu.

Cette équation

(160) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0\ ,$$

se réduit pour les cas des liquides incompressibles $(\rho = \mathrm{Cte})$, à

(161) $$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

2° L'équation *complémentaire*, qui dans le cas des liquides incompressibles, — le seul que nous considérerons par la suite, — se réduit justement à

(162) $$\rho = \mathrm{Cte}.$$

En nous plaçant précisément dans ce cas les équations du liquide visqueux se réduisent à

$$(163)\quad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta\, u + \rho X_e = \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\,\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array}\right.$$

d'où l'intégration devra permettre de tirer u, v, w, p, en fonction de (x, y, z) et du temps t.

Fonction de dissipation. — Revenons pour un instant au cas général, en vue de mettre en évidence certaines inégalités importantes auxquelles satisfont les coefficients λ et μ. Évaluons le travail effectué par les forces de viscosité. Pour le petit parrallélipipède élémentaire, les centres des forces normales à ox se déplacent pendant le temps dt, de :

$$(u\,dt, \ldots\ldots) \text{ et de } \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) dt, \ \ldots\ldots, \ \ldots\ldots$$

Le travail produit est donc, en ce qui concerne ces deux faces :

$$(-X_x\,dy\,dz)\,u\,dt + (-Y_x\,dy\,dz)\,u\,dt + (-Z_x\,dy\,dz)\,w\,dt$$
$$+\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) dt + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

c'est-à-dire, en ne prenant que les termes principaux,

$$\left[X_x\,\frac{\partial u}{\partial x} + Y_x\,\frac{\partial v}{\partial x} + Z_x\,\frac{\partial w}{\partial x}\right.$$
$$\left. + u\,\frac{\partial X_x}{\partial x} + v\,\frac{\partial Y_x}{\partial x} + w\,\frac{\partial Z_x}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

En opérant de même avec les quatre faces restantes, il vient dans le travail élémentaire total, d'abord des termes tels que

$$\left[u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + w\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz\,dt$$

qui d'après les équations du mouvement (158) elles-mêmes, expriment le travail qui se trouve utilisé en énergie cinétique et un travail des forces extérieures ; — et il restera ensuite une expression

$$Q\, dx\, dy\, dz\, dt \quad ,$$

avec

$$Q = \left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Z_x \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$+ \left(X_y \frac{\partial u}{\partial y} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

ou encore

$$(164) \quad \left\{ \begin{aligned} Q = &- p\,\theta + \lambda\,\theta^2 + \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] ; \end{aligned} \right.$$

$-p\,\theta$ représente le travail dû à la compression. La quantité restante représente le travail qui, du fait de la viscosité, est perdu comme énergie mécanique, et doit se retrouver sous forme de chaleur.

La fonction Q est la *fonction de dissipation*. Comme la viscosité est un *frottement* intérieur, par définition même elle consomme du travail et n'en fournit pas.

Donc l'expression

$$2\,\Phi = \lambda\,\theta^2 + \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \ldots\ldots \right]$$

est une quantité essentiellement positive ou nulle. Cela revient à dire que la forme quadratique à neuf variables

$$\lambda\,(a^2 + b_1^2 + c_2^2 + 2b_1c_2 + 2c_2a + 2ab_1) + 2\,\mu\,(a^2 + b_1^2 + c_2^2)$$
$$+ \mu\,[(b_2 + c_1)^2 + (c + a_2)^2 + (a_1 + b)^2]$$

est définie positive. Or trois carrés sont déjà en évidence à la fin de cette expression ; un calcul élémentaire met les deux groupes de termes restants, sous la forme

$$(\lambda + 2\,\mu)\left(a + \frac{\lambda\,(b_1 + c_2)}{\lambda + 2\,\mu}\right)^2 + \frac{4\,\mu\,(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\,\mu}\left[b_1 + \frac{\lambda\,c_2}{2\,(\lambda + \mu)}\right]^2$$
$$+ \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda + \mu}\, c_2^2$$

On voit que l'on doit avoir

$$\mu \geqq 0 \quad , \qquad \lambda + 2\mu \geqq 0 \quad , \qquad \lambda + \mu \geqq 0 \quad , \qquad 3\lambda + 2\mu \geqq 0$$

cela se réduit aux deux conditions

$$\mu \geqq 0 \quad , \qquad 3\lambda + 2\mu \geqq 0$$

qui entrainent toutes les autres.

Pour les gaz, on fait généralement l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad .$$

Dans le cas des liquides incompressibles, il nous suffira de retenir que le *coefficient de viscosité* μ, le seul qui figure dans (163), comme dans les formules (157) (puisque $\theta = 0$), est *positif*. Si $\mu = 0$ on retombe sur les équations du fluide parfait.

Toujours dans le cas du liquide, le rapport

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

porte le nom de *coefficient cinématique de viscosité.*

Équations du mouvement lent. — On désigne par « mouvements lents » les mouvements pour lesquels on peut considérer comme négligeables par rapport aux expressions

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t} \quad ,$$

les combinaisons

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

et analogues, celles-ci étant considérées comme de second ordre, tandis que les premières seraient du premier ordre. Les équations du mouvement lent d'un liquide incompressible sont par suite

$$(165) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \, \Delta u + \rho \, X_e = \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

elles ont le grand avantage d'être linéaires, mais il convient de ne pas perdre de vue les hypothèses qui y ont conduit. D'une part, l'établissement des formules (152) engage bien à donner une importance plus particulière au cas où les vitesses sont peu considérables, mais il conviendrait, une fois les calculs terminés dans un cas de ce genre, de vérifier *à posteriori* si les termes tel que

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

sont effectivement partout d'un ordre de grandeur moindre que les termes conservés. L'oubli de cette vérification risque d'apporter des complications dans les théories les plus diverses.

Équations des mouvements à tourbillons négligeables. — Reprenons les formules générales (163). Il est clair qu'on a identiquement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

c'est-à-dire, à cause des formules (147) qui définissent le vecteur tourbillon,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + 2\,(\eta\, w - \zeta\, v).$$

Donc, pour un mouvement où *les tourbillons* sont partout *négligeables*, la formule précédente et les analogues permettront d'écrire les équations (163) sous la forme

$$(165')\quad \left\{\begin{aligned} & -\frac{\partial q}{\partial t} + \mu\,\Delta u + \rho\,X_e = \rho\,\frac{\partial u}{\partial t} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ & \text{avec} \\ & q = p + \frac{\rho}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2) \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont *identiques aux équations (165)*, à cela près que

la pression moyenne p doit être remplacée par l'expression q dont on a donné la valeur.

Les remarques ci-dessus, concernant les équations (165), s'appliquent immédiatement à (165'). Il conviendrait, quand on en fait usage, de vérifier après coup que les tourbillons sont en effet négligeables.

Quoi qu'il en soit, nous allons appliquer dans les deux Chapitres suivants, les équations générales (163) à deux problèmes particuliers. Dans le premier d'entre eux nous trouverons mises en évidence certaines circonstances importantes concernant le passage à la limite quand le coefficient de viscosité tend vers zéro. Le second problème, dont nous ne voulons pas exagérer l'intérêt physique immédiat, aura l'avantage de nous fournir naturellement et presque sans effort les propriétés essentielles de l'équation de la chaleur. Nous aurons besoin ultérieurement de ces propriétés, ainsi que d'autres, qui pour le système (165) apparaîtront comme des généralisations naturelles de celles-ci que nous aurons ainsi démontrées.

CHAPITRE X

SUR UN PROBLÈME DE M. J. BOUSSINESQ

Le problème dont nous allons nous occuper nous permettra de constater quelles sortes de singularités peuvent intervenir dans le passage à la limite, d'un liquide peu visqueux à un fluide parfait, en ce qui concerne le voisinage des frontières du liquide.

Nous supposons un liquide visqueux, occupant tout l'espace au-dessus d'un plan xOy, et au repos à l'instant $t=0$. On applique, à cet instant, une force constante k à l'unité de masse du fluide, dans le sens de l'axe Ox. Le liquide prend un mouvement où la seule composante u de la vitesse parallèlement à Ox, est différente de 0. Le liquide *adhère* au plan fixe xOy : c'est-ce qui résulte de l'expérience pour les fluides visqueux, ceux-ci adhèrent aux parois solides qu'ils baignent. Enfin, le mouvement est le même évidemment dans tous les plans $x = C^{te}$; cela résulte du reste aussi de l'équation de continuité, ici réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Par symétrie, nous admettrons que la pression moyenne p soit aussi indépendante de x.

Les formules (163) nous donnent donc, actuellement, pour déterminer u, l'équation unique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k + \frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{166}$$

qui, du reste, est aussi bien valable pour le mouvement non lent ou le mouvement lent.

Les conditions aux limites à satisfaire sont :

1° L'adhérence à la paroi :

$$u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \;, \quad t \geq 0 \;; \tag{167}$$

2° Le repos initial :

$$u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad , \quad z \geq 0. \tag{168}$$

Ce problème a été étudié et résolu pour la première fois par M. Boussinesq (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 336) et il a fait récemment l'objet d'un élégant article de M. Maurice Roy (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin 1925, p. 321). L'équation (166) se ramène immédiatement à l'« équation de la chaleur » ; en y posant :

$$u - kt = u_1 \tag{169}$$

elle devient en effet :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}. \tag{170}$$

Nous allons ici facilement l'intégrer dans les conditions qui nous occupent.

Posons :

$$\zeta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \frac{z}{\sqrt{t}}, \quad \text{et} \quad u_1 = kt\varphi(\zeta) , \tag{171}$$

φ étant une fonction inconnue de ζ. Nous allons voir que la solution cherchée figure parmi les solutions de (170) qui sont de cette forme. Un calcul élémentaire montre que $\varphi(\zeta)$ doit satisfaire à l'équation :

$$\varphi''(\zeta) + \frac{1}{2} \zeta \varphi'(\zeta) - \varphi(\zeta) = 0. \tag{172}$$

On reconnait sans peine, en cherchant à vérifier cette équation par un polynôme entier, que $\zeta^2 + 2$ en est une solution particulière ; ceci conduit à poser :

$$\varphi(\zeta) = (\zeta^2 + 2)\psi(\zeta) ,$$

d'où, en substituant :

$$\frac{\psi''(\zeta)}{\psi'(\zeta)} + 4 \frac{\zeta}{\zeta^2 + 2} + \frac{\zeta}{2} = 0.$$

On en tire :

$$\psi'(\zeta) = C \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4}}}{(\zeta^2 + 2)^2} ,$$

C étant une constante, et enfin C_1 étant une nouvelle constante :

$$(173) \qquad \varphi(\zeta) = C_1(\zeta^2 + 2) + C(\zeta^2 + 2) \int_0^\zeta \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds.$$

Essayons de satisfaire aux conditions (167) et (168), en nous rappelant que $u = kt\,[1 + \varphi(\zeta)]$. La condition (167) implique que, pour $\zeta = 0$, u soit nul, quel que soit t, donc :

$$1 + 2\,C_1 = 0$$

La condition (168) exige que pour $\zeta = \infty$, $\dfrac{1 + \varphi(\zeta)}{\zeta^2}$ s'annule. Or, on peut écrire :

$$(174) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + \varphi(\zeta) = C_1\,\zeta^2 + C(\zeta^2 + 2) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds \\ - C(\zeta^2 + 2) \int_\zeta^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds \end{aligned} \right.$$

ce qui est permis, car l'intégrale dont il s'agit ici est manifestement convergente uniformément pour s infini. En divisant par ζ^2, le dernier terme de (174) tendra évidemment vers zéro, et il restera la condition :

$$C_1 + C \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds = 0.$$

Nous poserons pour abréger :

$$(175) \qquad \alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds\,,$$

en sorte qu'on aura :

$$C_1 + C\alpha = 0\,,$$

Par suite :

$$C_1 = -\frac{1}{2}\,, \qquad C = \frac{1}{2\alpha}\,,$$

et, d'après (173) et (175) :

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2}(\zeta^2 + 2) + \frac{1}{2\alpha}(\zeta^2 + 2)\int_0^{\zeta} \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2}\, ds$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}(\zeta^2 + 2)\int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2}\, ds.$$

Revenant à u par les relations (169) et (171) il vient enfin :

$$(176)\quad \left\{ \begin{array}{l} u = kt\left[1 - \dfrac{1}{2\alpha}(\zeta^2 + 2)\displaystyle\int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2}\, ds\right], \\ \left(\zeta = \sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}\dfrac{z}{\sqrt{t}}\right). \end{array} \right.$$

Telle est la solution de notre problème. Voyons ce que devient cette solution lorsque le coefficient de viscosité μ tend vers zéro.

Supposons d'abord $z \neq 0$, alors ζ devient infini, et le calcul précédent montre que u tend vers kt. Si au contraire $z = 0$, ζ est nul, et l'on a $u = 0$. Donc, à la limite on a :

$$u(z, t) = kt \quad \text{pour} \quad z > 0, \quad t \geq 0$$
$$u(z, t) = 0 \quad \text{—} \quad z = 0, \quad t \geq 0.$$

Cette solution limite est donc une fonction analytique de t, pour $t \geq 0$; mais, pour $t > 0$, ce n'est pas une fonction analytique de z pour $z = 0$: il y a discontinuité brusque.

Si au lieu de chercher la limite de la solution u, après l'intégration, effectuée ci-dessus, de l'équation aux dérivées partielles (166), on avait procédé directement, en commençant par faire tendre μ vers zéro dans l'équation (166) elle-même, on aurait obtenu d'abord l'équation :

$$(177)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k$$

dont la solution est évidemment :

$$u = kt + \psi(z).$$

Comme u doit être nul pour $t = 0$ $z = 0$, il faut donc prendre $\psi(z) \equiv 0$, et la solution demandée est $u = kt$. Mais on voit aussitôt *qu'elle ne satisfait plus* à la seconde condition aux limites (condition 167); on n'a pas $u = 0$ pour $z = 0$ $t > 0$. La condition d'adhérence devient impossible à satisfaire.

Cette difficulté, au fond, est plus apparente que réelle. Elle tient précisément à ce que, pour un fluide visqueux, il y a adhérence à la paroi solide baignée par le fluide, alors qu'au contraire un fluide parfait glisse simplement sur une telle paroi. Le calcul précédent montre bien comment on passe d'un cas à l'autre. Il montre, en même temps, l'origine de certaines difficultés dans la théorie qui va nous occuper : il ne revient pas tout à fait au même, si l'on cherche à savoir ce que devient le mouvement d'un fluide où la viscosité est faible, d'étudier le mouvement limite sur les équations aux dérivées partielles où l'on fait tendre μ vers zéro, ou bien d'étudier ce mouvement en commençant par intégrer (ou supposer intégrées) les équations du fluide visqueux, et en faisant tendre μ vers zéro, seulement dans ces solutions une fois obtenues.

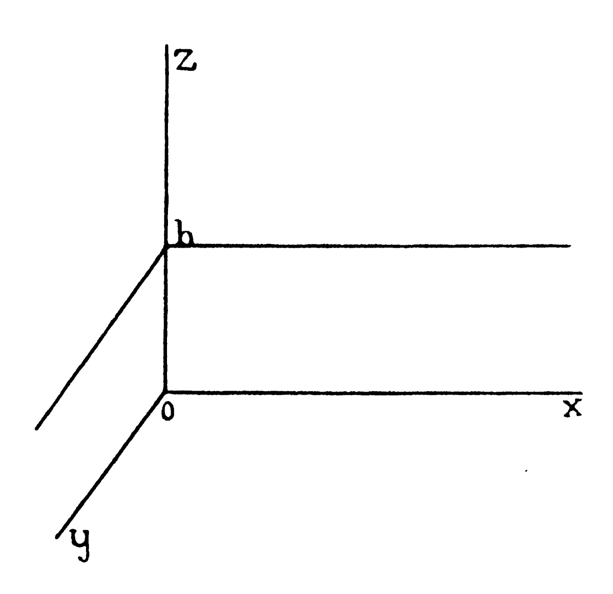
C'est ce qui légitime certaines précautions qui seront prises dans le courant des calculs qui seront exposés ultérieurement.

On voit aussi comment, à la limite, des conditions d'adhérence pourront se transformer en des conditions de simple glissement le long d'une paroi.

CHAPITRE XI

UN PROBLÈME PARTICULIER CONDUISANT AUX PROPRIÉTÉS UTILES DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Dans le présent Chapitre, nous allons exposer, avec quelques détails, la solution d'un problème particulier, assez analogue au précédent, mais beaucoup plus général. Ce problème en soi n'est du reste pas sans intérêt, mais nous allons surtout le développer dans le but d'obtenir, chemin faisant, divers résultats concernant l'équation de la chaleur, ces résultats eux-mêmes, ou leur généralisation, nous devant être d'un grand secours par la suite.



Envisageons un fluide visqueux, formant une couche disposée entre les deux plans parallèles $z = 0$ et $z = h$. On suppose ces deux plans animés d'un mouvement connu, parallèle à l'axe Ox; soient $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$ les vitesses de ces deux mouvements à l'instant t. A l'instant initial $t = 0$ la vitesse u dans le sens Ox, en chaque point du liquide, est connue en fonction de z,

elle est égale à $\psi(z)$. On admettra naturellement que ces données soient compatibles à l'instant $t=0$, c'est-à-dire qu'on a :

(178) $$\varphi(0)=\psi(0) \quad , \quad \varphi_1(0)=\psi(h).$$

Il résulte, avec évidence, de ces données, que dans le liquide, la seule composante u de la vitesse en chaque point sera différente de zéro ; l'équation de continuité exige qu'alors u soit indépendant de x ; u est simplement une fonction de z et t : $u(z, t)$; et nous sommes encore conduits, par raison de symétrie, à admettre que p ne dépend pas non plus de x. Dans ces conditions, en supposant enfin qu'il n'y a pas de forces extérieures notables appliquées au fluide, les équations générales (163) se réduiront à l'équation :

(179) $$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire à *l'équation de la chaleur.*

Il convient de remarquer que nos raisonnements s'appliquent aux formules (163), c'est-à-dire qu'ici nous ne faisons pas plus qu'au Chapitre X, l'hypothèse qu'il s'agisse de mouvements lents.

Nous devons donc chercher une solution de l'équation (179), avec les conditions aux limites suivantes :

(180) $$\begin{cases} u=\varphi(t) & \text{pour} \quad z=0 & t \geqq 0 \\ u=\varphi_1(t) & \text{—} \quad z=h & t \geqq 0 \\ u=\psi(z) & \text{—} \quad 0 \leqq z \leqq h & t=0. \end{cases}$$

Pour y parvenir, nous allons déterminer d'abord quelques solutions particulières de (179). Il est évident que l'expression :

$$u_0 = A\, e^{\alpha z+\beta t},$$

où A, α, β, sont des constantes, est une solution de l'équation (179), à condition que α et β soient liées par la relation ;

$$\mu \alpha^2 - \rho \beta = 0.$$

On a donc :

(181) $$u_0 = A\, e^{\alpha z + \frac{\mu}{\rho}\alpha^2 t}.$$

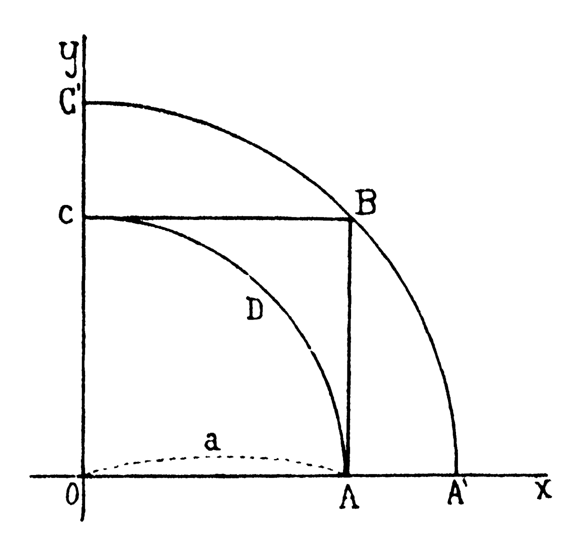
Rappelons-nous ici la formule élémentaire :

(182) $$\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

qu'on déduit au reste de la double inégalité évidente :

$$\iint_{OADCO} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint_{OABCO} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint_{OA'BC'O} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

et en supposant que le rayon a de la circonférence ADC devient infini : les termes extrêmes deviennent (par un calcul élémentaire en



coordonnées polaires) tous deux égaux à $\frac{\pi}{4}$, et le terme intermédiaire est le carré de

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,dt.$$

D'où le résultat rappelé.

On conclut de là que, quel que soit la constante s, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\lambda+s)^2}\,d\lambda,$$

ou encore :

(183) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2-2s\lambda}\,d\lambda = e^{s^2}\sqrt{\pi}.$$

Nous pourrons donc écrire l'expression (181) de u_0 sous la forme, valable pour $t \geqq 0$:

$$u_0 = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\, e^{\alpha z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2-2\lambda\alpha\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}}\,d\lambda.$$

Nous avons ainsi une solution particulière de l'équation de la

chaleur; celle-ci étant linéaire, nous en aurons une autre plus générale, en donnant à A et α diverses valeurs, et faisant la somme des fonctions particulières ainsi obtenues; ceci donne la fonction :

$$U_0(z\,,\,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \left[\Sigma\, A\, e^{\alpha\left(z-2\lambda\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}\right)}\right] d\lambda$$

le Σ représentant une somme et au besoin une série (supposée convergente). Pour $t = 0$, cette solution se réduit à :

$$U_0(z\,,\,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} (\Sigma\, A\, e^{\alpha z})\, d\lambda = \Sigma\, A\, e^{\alpha z}.$$

Nous voyons donc que si nous posons :

$$F(z) = \Sigma\, A\, e^{\alpha z}\,,$$

nous pourrons écrire la solution particulière U_0 sous la forme :

$$(184) \qquad U_0(z\,,\,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\, F\left(z - 2\lambda\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}\right) d\lambda.$$

On trouvera dans les traités d'Analyse des développements sur la possibilité de représenter une fonction arbitraire $F(z)$ par une somme ou une série d'exponentielles de la forme employée ci-dessus. Quoi qu'il en soit, le raisonnement intuitif qui précède donne à prévoir que la formule (184) fournit une solution de l'équation de la chaleur, se réduisant à $F(z)$ pour $t = 0$. C'est ce qu'il est extrêmement facile de vérifier moyennant des hypothèses très simples et très générales concernant la fonction F (cf. par ex. Goursat, *Analyse*, t. III, ch. XXIX).

On en conclut enfin que l'expression :

$$(185) \qquad U_1(z\,,\,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\, F\left(z - 2\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\rho}(t-\tau)}\right) d\lambda,$$

valable pour $t \geq \tau$, donne une solution de (179) se réduisant à $F(z)$ pour $t = \tau$.

En effectuant le changement de variable :

$$z - 2\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\rho}(t-\lambda)} = \zeta\,,$$

nous mettrons cette fonction sous la forme :

$$(186) \qquad U_1(z\,,\,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\rho}{\mu\,(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)\, e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4\frac{\mu}{\rho}(t-\tau)}}\, d\zeta.$$

Cette dernière forme met en évidence — en supposant $F(\zeta)$ constamment nul, sauf dans un petit intervalle avoisinant $\zeta = z$, — que la fonction :

$$(187) \qquad u_1(z\,,\,t) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4\frac{\mu}{\rho}(t-\tau)}}$$

est encore une solution de l'équation de la chaleur. On désigne habituellement cette fonction sous le nom de *solution fondamentale*. Bien entendu, elle était facile à obtenir directement sur l'équation même. On voit de suite que quand t tend vers τ, u_1 tend vers zéro, sauf dans le cas où l'on aurait $z = \zeta$, auquel cas u_1 devient infini. C'est cette propriété simple qui fait toute l'importance de cette solution fondamentale.

La symétrie évidente qu'on aperçoit entre les deux groupes de lettres $(z\,,\,t)$ et $(\zeta\,,\,\tau)$ dans la fonction $u_1(z\,,\,t\,,\,\zeta\,,\,\tau)$ montre que cette solution satisfait d'une part à l'équation :

$$\mu\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \rho\,\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$$

et d'autre part à l'équation :

$$\mu\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \rho\,\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = 0$$

qui en est l'*équation adjointe*.

Ces préliminaires étant posés, revenons à notre problème initial, et, pour abréger l'écriture, posons :

$$(188) \qquad \frac{\mu}{\rho}\, t = t' \quad , \qquad \frac{\mu}{\rho}\,\tau = \tau' \quad ,$$

de sorte que nos équations précédentes s'écriront :

$$(189) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t'} = 0 \quad ; \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau'} = 0.$$

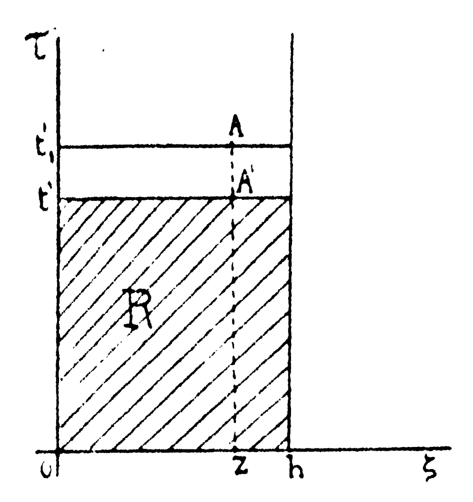
Dans le plan $(\zeta\,,\,\tau')$, envisageons le rectangle R indiqué sur la figure ci-jointe : $(0 \leq \zeta \leq h \;;\; 0 \leq \tau' \leq t')$. Dénommons $u(z\,,\,t')$ la solution cherchée de l'équation (179) après le changement de variable (188); nous la considérerons provisoirement avec les

variables (ζ, τ'), sous la forme $u(\zeta, \tau')$, elle satisfera donc à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau'} = 0 ;$$

soit maintenant $U_2(\zeta, \tau')$ une solution de l'équation adjointe :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial U_2}{\partial \tau'} = 0.$$



Une combinaison évidente de ces deux équations permet d'écrire :

$$(190) \qquad \frac{\partial}{\partial \tau'}(u\,U_2) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(U_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right).$$

Supposons alors satisfaites les conditions de continuité voulues dans le domaine R, et appliquons à ce domaine la formule de Green :

$$\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial \tau'}(u\,U_2) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(U_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)\right] dS$$
$$= \int_{\text{contour}} u\,U_2\,d\zeta + \left(U_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial \zeta}{\partial U_2}\right) d\tau' = 0$$

où le premier membre est évidemment nul à cause de (190). Cela donne, en explicitant :

$$(191) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^h (u\,U_2)_{\tau'=t'}\,d\zeta - \int_0^h (u\,U_2)_{\tau'=0}\,d\zeta \\ & + \int_0^{t'} \left(U_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau' \\ & - \int_0^{t'} \left(U_2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau' = 0. \end{aligned} \right.$$

Soit alors $A(\zeta = z, \ \tau' = t'_1 ; \ 0 < z < h, \ t'_1 > t')$ un point extérieur au rectangle. Nous allons former une solution $U_2(\zeta, \tau', z, t'_1)$

qui soit régulière dans R, qui soit *nulle* pour $0 < \zeta < h$ lorsque τ' tend vers t'_1, — sauf au point A $(\zeta = z)$ où elle devienne infinie; et enfin, qui soit nulle également pour $\zeta = 0$ et $\zeta = h$ $(0 < \tau' < t'_1)$.

Au moyen de la fonction fondamentale $u_1(z, t)$ (f. 187) il est bien facile de construire la fonction demandée, sous la forme :

$$(192)\quad \left\{ \begin{aligned} & U_2(\zeta, \tau', z, t'_1) = \frac{1}{\sqrt{t'_1 - \tau'}} \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[e^{-\frac{(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t'_1 - \tau')}} - e^{-\frac{(\zeta + z + 2nh)^2}{4(t'_1 - \tau')}} \right]. \end{aligned} \right.$$

La série écrite, où n reçoit toutes les valeurs entières, positives négatives ou nulles, est évidemment convergente, et cette expression U_2, somme de solutions élémentaires de l'équation adjointe, est aussi une solution. Les termes de la série ont été visiblement choisis de manière à annuler U_2 sur les bords verticaux du rectangle R ; et la façon dont se comporte la fonction élémentaire u_1 nous assure de la condition concernant le cas où τ' tend vers t'_1 (1).

---

(1) La fonction U_2 définie par (192) s'exprime très aisément au moyen des fonctions elliptiques. Introduisons les fonctions de *Jacobi*; celles-ci se relient aux fonctions σ que nous connaissons déjà, par les équations, qui peuvent servir de définition :

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\theta_1(v)}{\theta'_1(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}, \qquad \sigma_\alpha u = \frac{\theta_{\alpha+1}(v)}{\theta_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

avec

$$u = 2\omega_1 v$$

comme d'habitude. On démontre alors la formule (cf. par ex. Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, form. XLIV, 3) :

$$\theta_3(v \mid \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi}{\tau}(v+n)^2} \qquad \left(\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}\right).$$

On en conclut :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t'_1 - \tau')}} = \frac{\sqrt{\pi(t'_1 - \tau')}}{h} \theta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h} \,\middle|\, \frac{i\pi(t'_1 - \tau')}{h^2}\right);$$

$$\sum e^{-\frac{(\zeta + z + 2nh)^2}{4(t'_1 - \tau')}} = \frac{\sqrt{\pi(t'_1 - \tau')}}{h} \theta_3\left(\frac{\zeta + z}{2h} \,\middle|\, \frac{i\pi(t'_1 - \tau')}{h^2}\right)$$

et par suite :

$$U_2(\zeta, \tau', z, t'_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \left[\theta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h} \,\middle|\, \frac{i\pi(t'_1 - \tau')}{h^2}\right) - \theta_3\left(\frac{\zeta + z}{2h} \,\middle|\, \frac{i\pi(t'_1 - \tau')}{h^2}\right)\right].$$

En introduisant cette fonction U_2 dans la formule (191), celle-ci devient, en supposant d'autre part que u soit la fonction cherchée, satisfaisant aux conditions aux limites (180) :

$$(193)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^h (uU_2)_{\tau'=t'}\, d\zeta &= \int_0^{t'} \Phi(\tau') \left(\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau' \\ &- \int_0^{t'} \Phi_1(\tau') \left(\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau' + \int_0^h \psi(\zeta)\,(U_2)_{\tau'=0}\, d\zeta. \end{aligned} \right.$$

Bien entendu, dans cette formule, on a mis $\Phi(\tau')$ et $\Phi_1(\tau')$ pour $\varphi\left(\frac{\rho}{\mu}\,\tau'\right)$ et $\varphi_1\left(\frac{\rho}{\mu}\,\tau'\right)$.

Cela posé, faisons enfin, dans cette formule, tendre t'_1 vers t', c'est-à-dire le point A vers le point A'. Le premier nombre de (193) ne différera que d'une quantité qui tend vers zéro, de l'expression :

$$\int_0^h (u)_{\tau'=t'} \frac{e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4(t'_1-\tau')}}}{\sqrt{t'_1-\tau'}}\, d\zeta\ ,$$

et par conséquent, — en vertu de la formule (186), dans laquelle nous supposerons la fonction $F(\zeta)$ nulle en dehors de l'intervalle $(0\,,\,h)$, — il tendra vers :

$$2\sqrt{\pi}\,(u)_{\substack{\zeta=z \\ \tau'=t'}}.$$

Nous obtenons ainsi la formule fondamentale :

$$(194)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\; u(z\,,\,t') &= \int_0^{t'} \Phi(\tau') \left(\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=0 \\ t'_1=t'}} d\tau' \\ &- \int_0^{t'} \Phi_1(\tau') \left(\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=h \\ t'_1=t'}} d\tau' + \int_0^h \psi(\zeta)\,(U)_{\substack{\tau'=0 \\ t'_1=t'}}\, d\zeta. \end{aligned} \right.$$

Cette formule résout le problème proposé. Il serait assez facile de vérifier *a posteriori*, en utilisant les propriétés de la solution fondamentale, qu'elle remplit effectivement les conditions aux limites que nous nous étions imposées. (Cf. par ex. Goursat, *Analyse*, t. III, notamment aux pages 296 et 306).

Examen d'un cas particulier. — Supposons $h = \infty$, c'est-à-dire imaginons le fluide indéfini au-dessus du plan $z = 0$. La fonction U_2 se réduit alors à :

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{t'_1 - \tau'}} \left[e^{-\frac{(\zeta - z)^2}{4(t'_1 - \tau')}} - e^{-\frac{(\zeta + z)^2}{4(t'_1 - \tau')}} \right]$$

qu'au surplus il était facile d'écrire directement. Et l'on a, soit en partant de (194), soit autrement, la solution pour u :

$$(195) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\, u(z, t') &= \int_0^{t'} \Phi(\tau') \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t' - \tau')}}}{(t' - \tau')^{3/2}} z\, d\tau' \\ &+ \frac{1}{\sqrt{t'}} \int_0^{\infty} \psi(\zeta) \left[e^{-\frac{(\zeta - z)^2}{4t'}} - e^{-\frac{(\zeta + z)^2}{4t'}} \right] d\zeta. \end{aligned} \right.$$

Appliquons cette formule, à chercher vers quel mouvement limite tend le fluide, lorsque, partant d'un état de vitesse arbitraire ($\psi(\zeta)$ quelconque), on suppose que la vitesse $\Phi(\tau')$ du plan xoy finisse par devenir uniforme : $\Phi(\tau')$ tend vers V pour τ' infini. Dans ces conditions, on aperçoit immédiatement que, dans l'équation (195), la première intégrale au second membre peut se mettre sous la forme :

$$(196) \qquad \int_0^{t'} [\Phi(\tau') - V] \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t' - \tau')}}}{(t' - \tau')^{3/2}} z\, d\tau' + V \int_0^{t'} \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t' - \tau')}}}{(t' - \tau')^{3/2}} z\, d\tau'.$$

Le changement de variable :

$$\frac{z^2}{4(t' - \tau')} = s^2 , \qquad d\tau' = \frac{z^2}{2s^3} ds ,$$

transforme le coefficient de V en :

$$4 \int_{\frac{z}{2\sqrt{t'}}}^{\infty} e^{-s^2} ds ,$$

expression qui, lorsque t' augmente indéfiniment, tend vers $2\sqrt{\pi}$. Quant à la première intégrale qui figure dans la somme (196), il est facile de voir qu'elle tend vers zéro pour $t' = \infty$. Car, à partir de t' assez grand ($t' > A$) on aura, pour un ε donné :

$$| \Phi(\tau') - V | < \varepsilon$$

et l'on aura pour $t' > \mathrm{A}$, — sans récrire tout au long la quantité à intégrer, — d'une part une intégrale $\int_0^{\mathrm{A}}$ qui tendra vers zéro pour $t' = \infty$, et d'autre part une intégrale $\int_{\mathrm{A}}^{t'}$ pour laquelle on pourra écrire :

$$\left| \int_{\mathrm{A}}^{t'} |\Phi(\tau') - \mathrm{V}| \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t'-\tau')}}}{(t'-\tau')^{3/2}} z\, d\tau' \right| < \varepsilon \int_{\mathrm{A}}^{t'} \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t'-\tau')}}}{(t'-\tau')^{3/2}} z\, d\tau'$$
$$< \varepsilon \int_0^{+\infty} \ldots d\tau' = 2\varepsilon\sqrt{\pi}\,.$$

L'expression (196) a donc pour limite $2\sqrt{\pi}\ \mathrm{V}$.

Il reste enfin l'intégrale relative à $\psi(\zeta)$; en la séparant en deux parties, et faisant respectivement dans chaque partie le changement de variable $\frac{\zeta \pm z}{2\sqrt{t'}} = s$, cette intégrale se met sous la forme :

$$2\int_{-\frac{z}{2\sqrt{t'}}}^{\infty} \psi(z + 2s\sqrt{t'})\, e^{-s^2}\, ds - 2\int_{\frac{z}{2\sqrt{t'}}}^{\infty} \psi(-z + 2s\sqrt{t'})\, e^{-s^2}\, ds$$

ce qui, pour t' infini, et pourvu que la vitesse initiale à l'infini $\psi(\infty)$ soit finie, devient évidemment nul.

Finalement, nous obtenons, en nous reportant à (195) :

$$\lim_{t'=\infty} u(z\,,\ t') = \mathrm{V}.$$

A la limite, le mouvement devient uniforme, et le plan mobile xoy entraîne avec lui tout le liquide connu formant masse compacte avec lui. Cette circonstance d'apparence paradoxale, s'explique en partie par le fait que le plan mobile est supposé indéfiniment étendu, et que le régime permanent demande, d'autre part, un temps infini pour s'établir.

Il y a là un phénomène que l'on retrouve en d'autres circonstances pour les fluides visqueux, par exemple dans le problème du mouvement permanent produit par la translation d'un cylindre circulaire indéfini, dans une direction normale à son axe. On constate, là aussi, que tout le liquide est entraîné en bloc avec le cylindre. Ce résultat, comme l'explique M. J. Boussinesq (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 537), montre à quel point les frottements intérieurs accroissent la solidarité des diverses parties d'une masse fluide qui

se déforme. L'expérience ne contredit pas ce point de vue, au moins l'expérience faite dans certaines conditions : pour le cas du cylindre précédent, MM. Favé et Charpentier (*Compte rendus*, avril 1904, p. 967) ont vérifié que, dans certains cas, l'entraînement effectif du liquide par le cylindre était encore très sensible à des distances valant cent diamètres du cylindre.

Il est très instructif, en partant de la solution générale (195), de vérifier ce qui se passe, à un instant quelconque, lorsque le coefficient de viscosité μ tend vers zéro. On prévoit bien ce qui se passera : le mouvement initial, étant parallèle à Ox, se continuera indéfiniment, pour $z \geqslant 0$, tel qu'il était au début : le mouvement de la paroi xoy, puisqu'il n'y a plus de viscosité, n'aura aucune influence sur le liquide superposé. Sur la frontière seulement, apparaîtra une singularité à la limite. Cela est très aisé à mettre en évidence. Écrivons d'abord l'équation (195) en revenant aux variables t et τ au lieu de t' et τ'. On a de suite :

$$2\sqrt{\pi}\, u(z, t) = \int_0^t \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\, \varphi(\tau)\, \frac{e^{-\frac{\rho z^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\, z\, d\tau$$
$$+ \sqrt{\frac{\rho}{\mu t}} \int_0^\infty \psi(\zeta) \left[e^{-\frac{\rho(\zeta - z)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{\rho(\zeta + z)^2}{4\mu t}} \right] d\zeta.$$

Les changements de variables — déjà utilisés ci-dessus, —

$$s = \frac{z}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}(t-\tau)}} \qquad \text{et} \qquad s' = \frac{\zeta \pm z}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\, t}}$$

effectués dans les deux intégrales, fournissent le résultat suivant :

$$2\sqrt{\pi}\, u(z, t) = \int_{\frac{z}{2\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}}}^{+\infty} 4\, \varphi\left(t - \frac{\rho z^2}{4\mu s^2}\right) e^{-s^2}\, ds$$
$$+ \int_{-\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}}^{+\infty} 2\, \psi\left(z + 2\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}\, s'\right) e^{-s'^2}\, ds'$$
$$- \int_{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}}^{+\infty} 2\, \psi\left(-z + 2\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}\, s'\right) e^{-s'^2}\, ds'.$$

Soit alors $z \neq 0$, et faisons tendre μ vers zéro, il est manifeste

que la première intégrale et la troisième donneront zéro à la limite; la seconde intégrale deviendra au contraire (éq. 182) :

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z)\, e^{-s'^2}\, ds' = 2\sqrt{\pi}\; \psi(z)$$

c'est-à-dire que, dans toute la masse fluide, on aura :

$$\lim u(z, t) = \psi(z),$$

comme dans l'état initial.

Si, au contraire, $z = 0$, les deux dernières intégrales ci-dessus se détruisent, et il reste simplement au second membre :

$$4 \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-s^2}\, ds,$$

c'est-à-dire :

$$2\sqrt{\pi}\; \varphi(t).$$

Donc, sur la paroi, on retrouve $u = \varphi(t)$, ce qui est la condition à la frontière.

On voit qu'en général, tout comme dans le problème de M. Boussinesq et pour la même raison, la solution limite obtenue à partir de la solution générale ne sera pas analytique, par rapport à z pour $z = 0$ (du moins, sauf exception).

CHAPITRE XII

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POTENTIELS

Dans ce Chapitre, nous allons d'abord rappeler quelques propriétés des potentiels, en passant très rapidement sur celles qui sont classiques ; nous insisterons davantage ensuite sur les propriétés des dérivées premières des potentiels de simple couche quand on traverse la surface sur laquelle est étendue la couche en question ; les conditions d'existence et de continuité des dérivées tangentielles du dit potentiel sont moins connues, et nous en aurons besoin par la suite.

Étant donnée une surface Σ, l'intégrale :

$$(197) \qquad V = \iint_{\Sigma} \frac{\delta}{r} \, d\sigma ,$$

où δ représente la *densité* (fonction continue sur la surface), $d\sigma$ l'élément de surface, et r la distance d'un point $P\,(xyz)$ au point $Q\,(\xi\eta\zeta)$ sur l'élément $d\sigma$ de la surface, est un *potentiel de simple couche*. Ce potentiel est continu dans tout l'espace. L'intégrale :

$$(198) \qquad W = \iint_{\Sigma} \frac{\delta \cos \varphi}{r^2} \, d\sigma ,$$

est un potentiel de *double couche*, φ représentant l'angle PQN du vecteur QP avec la normale QN à la surface Σ.

Le cas particulier $\delta = 1$ donne l'intégrale de Gauss,

$$W_1 = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{r^2} \, d\sigma = - \iint_{\Sigma} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \, d\sigma$$

dont la signification est immédiate : elle est égale à la somme des

angles solides élémentaires, affectés du signe convenable, sous lesquels on voit du point P les divers éléments de la surface Σ.

Par exemple, si Σ est fermée et si n est la normale intérieure, on aura $W_1 = 4\pi,\ 2\pi,$ ou 0, selon que le point P est dans la surface, en un point simple de celle-ci, ou à son extérieur.

De ce fait élémentaire résulte, comme on sait, que le potentiel de double couche W, est discontinu quand on traverse Σ. Supposons encore Σ fermée, et admettons toujours que la densité δ soit une fonction continue sur la surface. Soit ρ_0 sa valeur en un point P_0 de Σ, on montre immédiatement que la fonction

$$\iint_\Sigma (\rho - \rho_0) \frac{\cos \varphi}{r^2} \, d\sigma$$

reste continue quand on traverse la surface. Il en résulte aussitôt que, en désignant par W_0 la valeur de W au point P_0, W_{0i} et W_{0e} les valeurs limites de W quand le point P tend vers P_0, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur, on a les relations :

$$W_{0i} - 4\pi\rho_0 = W_0 - 2\pi\rho_0 = W_{0e} . \tag{199}$$

Il est évident qu'en dehors de Σ, V et W sont des fonctions harmoniques : $\Delta V = \Delta W = 0$.

L'intégrale :

$$U = \iiint_\Omega \frac{\delta}{r} \, d\omega \tag{200}$$

étendue à un volume Ω, est un potentiel de *volume*. Ce potentiel garde un sens, même si le point P appartient à ce volume. L'expression :

$$H = \iiint_\Omega \delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\omega = \iiint_\Omega \delta \frac{\xi - x}{r^3} \, d\omega , \tag{201}$$

qui représente visiblement $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ lorsque le point P n'est pas dans Ω, garde également un sens quand P rentre dans le volume Ω. On voit aisément, δ étant supposé continu, que U et H sont fonctions continues dans tout l'espace, Ω compris, et que l'on a partout :

$$H = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{202}$$

(Voir un Cours d'analyse quelconque pour ces démonstrations entièrement élémentaires).

U et ses dérivées premières existent donc et sont continues. Il n'en est pas de même des dérivées secondes de U. Si l'on tente de dériver directement l'expression (201) par rapport à x, on tombe sur une expression dépourvue de sens lorsque P est dans Ω. En nous plaçant dans ce dernier cas, séparons Ω en deux portions Ω_1 et Ω_2, dont la première enferme le point P et soit Σ_1 la surface limite de Ω_1. L'identité

$$\delta \frac{\xi - x}{r^3} = - \delta \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} = - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\delta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta}{\partial \xi}$$

donne de suite, pour la portion U_1 de U qui correspond à Ω_1 :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \iiint_{\Omega_1} \frac{\partial \delta}{\partial \xi}\frac{1}{r}\, d\omega - \iint_{\Sigma_1} \frac{\delta}{r} \cos n_e x \, d\sigma$$

la dernière intégrale étant étendue au côté extérieur de Σ_1. Or, ici l'intégrale triple est un potentiel de volume qui, en admettant l'existence et la continuité de $\frac{\partial \delta}{\partial \xi}$, est continu ainsi que ses dérivées premières dans tout l'espace. Il en est de même de l'intégrale de surface tant que P n'est pas sur Σ_1. Comme aucune difficulté n'intervient quant à la portion U_2 de U qui est relative à Ω_2, et comme $U = U_1 + U_2$, on en conclut que U admet certainement des dérivées secondes, en dehors de Ω et dans Ω, les frontières étant exclues du raisonnement.

Si l'on calcule $\Delta \Omega$, on voit immédiatement qu'il est *nul* en un point extérieur à Ω. Par un point *intérieur*, ΔU se réduit par suite à ΔU_1, et l'on trouve :

$$\Delta U = \iiint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi}\frac{\xi - x}{r^3} + \frac{\partial \delta}{\partial \eta}\frac{\eta - y}{r^3} + \frac{\partial \delta}{\partial \zeta}\frac{\zeta - z}{r^3}\right) d\omega$$
$$- \iint_{\Sigma_1} \delta \left(\frac{\xi - x}{r^3}\cos n_e x + \frac{\eta - y}{r^3}\cos n_e y + \frac{\zeta - z}{r^3}\cos n_e z\right) d\sigma .$$

La valeur de ΔU au point P étant indépendante de la forme du petit volume Ω_1, prenons pour ce volume une petite sphère de centre P, et dont nous ferons tendre le rayon vers zéro.

Un calcul immédiat conduit à ce résultat (théorème de Poisson).

(203) $$\Delta U = -4\pi\delta , \quad \text{dans } \Omega$$

alors qu'on a :

$$\Delta U = 0 \quad , \qquad \text{hors de } \Omega$$

Les dérivées secondes, telles que $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, sont donc discontinues quand on travers la surface Σ de Ω.

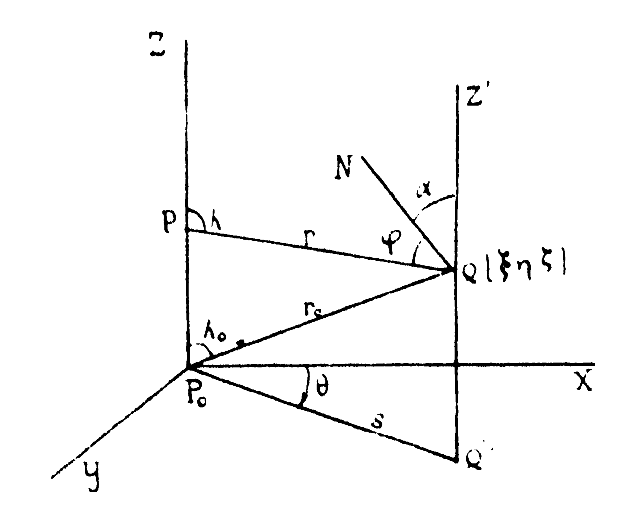
Tout cela est bien connu. Les résultats qui vont suivre sont moins classiques.

Les dérivées premières du potentiel de simple couche. — Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

La dérivée normale du potentiel de simple couche est discontinue quand on traverse la surface.

Soit : $V = \displaystyle\iint_\Sigma \frac{\delta}{r}\, d\sigma$ notre potentiel. Supposons, par exemple, Σ fermée, et soit P_0 l'un de ces points, supposé ordinaire, avec un plan tangent unique, que nous prenons pour plan des xy, l'axe des z étant dirigé vers l'intérieur de la surface.

Si nous envisageons la valeur de V en un point P de l'axe Oz, et non situé sur la surface, nous obtenons une fonction de z dont la dérivée est déterminée tant que z est différent de zéro. Nous appellerons dérivée normale en P_0 vers l'intérieur, la limite de



cette dérivée lorsque z, positif, tend vers zéro, nous la noterons $\left(\dfrac{dV}{dn}\right)_i$, ou mieux $\dfrac{dV_i}{dn_i}$ pour bien marquer qu'il s'agit du potentiel V pris à l'intérieur de Σ et de la dérivée dans le sens des z positifs.

En plaçant le point P à l'extérieur de Σ, nous définirons de même la dérivée $\dfrac{dV_e}{dn_i}\left(= -\dfrac{dV_e}{dn_e}\right)$ prise également dans le sens des z croissants.

Au point P de l'axe Oz, côté positif, par exemple, on a évidemment :

(204) $$\frac{dV}{dz} = \iint_\Sigma \delta \frac{\cos\lambda}{r^2} \, d\sigma$$

λ étant l'angle QPz, et Q étant un point qui décrit Σ. Si P est remplacé par P_0, on aura l'intégrale :

(205) $$R = \iint_\Sigma \delta \frac{\cos\lambda_0}{r_0^2} \, d\sigma \, .$$

En général, cette dernière expression R sera finie ; en effet, supposons que, au voisinage de P_0, on puisse mettre l'équation de la surface Σ sous la forme :

$$\zeta = s^{1+\gamma} f(s, \theta)$$

en coordonnées semi-polaires (s, θ, ζ) ; (avec $\gamma > 0$, f et ses dérivées premières étant continues) ; c'est certainement le cas lorsque ζ admet des dérivées secondes continues au voisinage de P_0. Dans ces conditions, les formules :

$$\cos\lambda_0 = \frac{\zeta}{r_0} \quad , \quad r_0^2 = s^2 + \zeta^2 \quad , \quad d\sigma = \frac{s\,ds\,d\theta}{\cos nz} \quad ,$$

montrent aisément que l'élément de R qui avoisine P_0 donne une contribution de l'ordre de $s^{\gamma-1}$; l'intégrale reste par conséquent finie.

Cependant $\dfrac{dV}{dz}$ *ne tend pas vers* R. Nous allons, en effet, prouver que l'expression :

$$T = \iint_\Sigma \left(\delta \frac{\cos\lambda}{r^2} + \delta_0 \frac{\cos\varphi}{r^2} \right) d\sigma \ ,$$

où δ_0 est la densité en P_0 et φ l'angle indiqué sur la figure, de la normale QN à la surface, avec QP, *reste continue* quand on traverse P_0.

Pour le démontrer évaluons $\cos\lambda$ dans le trièdre $Q\,(P\,z'\,N)$ dans lequel Qz' est parallèle à $P_0 z$, et où l'angle PQz' vaut évidemment $(\pi - \lambda)$. En appelant A l'angle dièdre suivant l'arête QN, il vient :

$$-\cos\lambda = \cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi \cos A$$

Donc :

$$T = -\iint_{\Sigma} (\delta \cos \alpha - \delta_0) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \delta \sin \alpha \cos A \frac{\sin \varphi}{r^2} d\sigma$$

En posant $\delta \cos \alpha = \varepsilon$, la première intégrale du second membre s'écrit : $\iint_{\Sigma} (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma$, et c'est une expression dont on a rappelé plus haut la continuité. Quant à la seconde intégrale, elle est également continue, parce que uniformément convergente : l'intégrale $\iint \frac{\sin \alpha}{r^2} d\sigma$ dont le module est plus grand sur une portion de Σ , au voisinage de P_0 , est en effet infiniment petite ; l'élément voisin de P_0 est de l'ordre de $\rho^{\lambda-1}$ et donne un résultat infiniment petit dans l'intégration. Comme la portion de Σ qui n'avoisine pas immédiatement P_0 ne fournit aucune difficulté, on en conclut bien la continuité annoncée.

De la continuité de T il résulte immédiatement les formules :

$$(206) \qquad \frac{dV_i}{dn_i} + 4\pi\delta_0 = R + 2\pi\delta_0 = \frac{dV_e}{dn_i} .$$

La dérivée normale est donc bien discontinue, elle fait un saut brusque, de $4\pi\delta_0$ quand on traverse la surface Σ au point P_0 .

Étude des dérivées tangentielles. — Il en va autrement des dérivées tangentielles. C'est ce que nous allons constater par le raisonnement qui va suivre, et qui nous fera retrouver en passant ce qui concerne la dérivée normale en nous expliquant le caractère exceptionnel de la propriété relative à cette direction.

Un exemple simple va immédiatement nous faire comprendre comment les choses se passent, et pourquoi se présente une difficulté.

Prenons le cas élémentaire où Σ est une sphère de rayon R_0 , et où la couche étendue a une densité constante δ_0 . Un calcul direct effectué sur l'intégrale (197) :

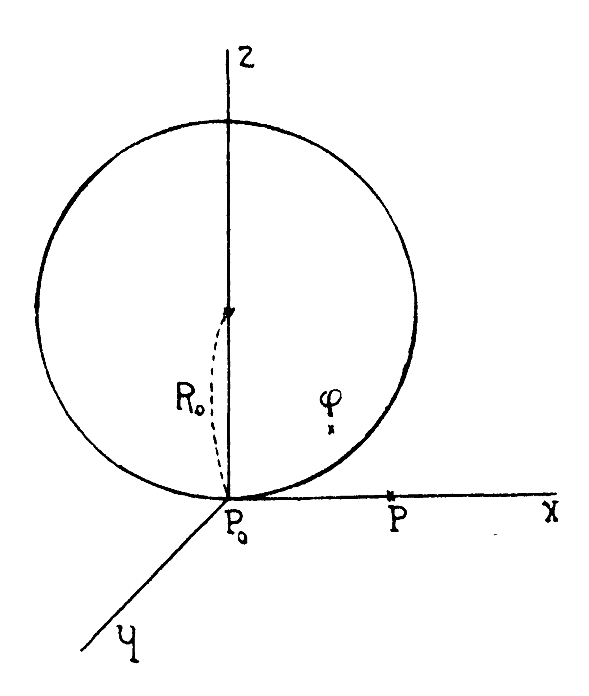
$$V = \iint_{\Sigma} \frac{\delta}{r} d\sigma ,$$

(ou bien les propriétés bien connues du potentiel) montrent qu'en appelant R la distance du point P au centre de la sphère, on a

$$V = \frac{4\pi\delta_0 R_0^2}{R} \quad \text{pour} \quad R > R_0 \quad \text{, et} \quad V = 4\pi\delta_0 R_0 \quad \text{pour} \quad R < R_0$$

les deux expressions se rejoignant pour $R = R_0$. En plaçant le point P sur ox, et adoptant les axes qu'indique la figure, il vient :

$$V = \frac{4\pi\delta_0 R_0^2}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \quad , \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\delta_0 R_0^2 x}{(x^2 + R_0^2)^{3/2}} .$$



La dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ tend donc vers une valeur déterminée, d'ailleurs nulle, si x tend vers zéro (aussi bien par valeurs positives que négatives). Cette dérivée tangentielle reste donc continue. Si, par ailleurs, on cherchait à la calculer en commençant par dériver directement la formule (197) par rapport à x $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = \iint_\Sigma \frac{\delta(\xi - x)}{r^3} d\sigma\right)$, on tomberait sur une expression qui, naturellement, dans le cas de la sphère et pour P placé sur ox et non en P_0, redonnerait le le même résultat que ci-dessus ; mais si l'on plaçait P en P_0, ce calcul fournirait la quantité suivante :

$$\frac{\delta_0}{4}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} \frac{\cos\omega \sin^2 2\psi}{\sin^3\psi} d\psi ,$$

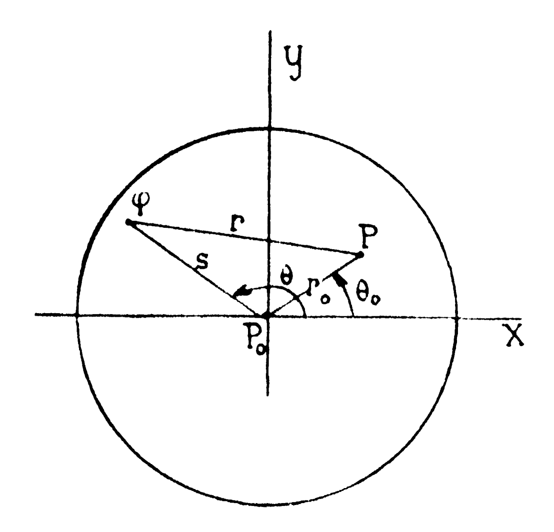
ω et ψ désignant la longitude et la latitude du point Q sur la sphère. Cette quantité n'a aucun sens *a priori*. Il est donc indispensable de ne pas faire usage sans précaution de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ calculée sur l'intégrale (197).

Si un calcul de ce genre a réussi précédemment au sujet de $\frac{dV}{dz}$

cela tient à la présence dans cette dernière expression (f. 204) du facteur $\cos\lambda$ sous le signe somme, — ce qui pour P_0 donne le facteur $\cos\lambda_0$ qui s'annule en P_0 .

Cas d'une couche plane. — Pour éviter aisément la difficulté dans le cas général, nous allons d'abord examiner le cas où la surface Σ est le plan xoy (ou uneportion de ce plan). Nous nous préoccupons d'étudier ce qui se passe au voisinage d'un point P_0 de ce plan. Toute la difficulté provenant des points immédiatement voisins, nous pouvons nous contenter d'envisager la seule portion du potentiel $V = \int\int \frac{\delta\, d\sigma}{r}$ qui correspond à la couche de densité δ , étendue sur un cercle de centre P_0 et de rayon a .

Nous allons former, P étant un point de ce cercle, le rapport $\frac{V_P - V_{P_0}}{PP_0}$, dont la limite doit nous donner, si elle existe, la dérivée



de V dans la direction P_0P . Nous supposerons toujours, dans la suite, que P tende vers P_0 , en suivant le rayon vecteur initial. Passant en coordonnées polaires (s, θ), on trouve de suite :

$$(207) \qquad V_P - V_{P_0} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[\frac{\delta \,.\, s\, ds}{\sqrt{s^2 - 2\, r_0\, s \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2}} - \delta\, ds \right].$$

Posons :

$$(208) \qquad s = r_0\, t \quad ,$$

il vient :

$$(209) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0}(V_P - V_{P_0}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{r_0}} \delta\,(r_0\, t, \theta) \\ &\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta - \theta_0) + 1}} - 1 \right] dt \end{aligned} \right.$$

Il nous faut donc étudier la limite du second membre de (209). Comme dans tout ce qui précède, nous admettons la continuité de la densité δ. Voici la méthode, due à M. H. Petrini [1], que nous allons employer, et que nous retrouverons encore ultérieurement. Il s'agit d'abord d'une expresion de la forme :

$$(210) \qquad I_{r_0} = \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^{\frac{a}{r_0}} \delta\,(r_0\,t,\,\theta)\,\mathrm{F}\,(t,\,\theta)\,d\,t\ .$$

Pour $t > 1$, il va être ainsi très facile de développer $\mathrm{F}\,(t,\,\theta)$ sous la forme :

$$(211) \qquad \mathrm{F}\,(t,\,\theta) = \frac{1}{t}\,\mathrm{F}_1 + \frac{\mathrm{F}_2}{t^2}\ ,$$

F_1 et F_2 restant toujours finis pour $t > 1$.

Supposons qu'on ait vérifié que les intégrales :

$$(212) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^{\beta} \delta\,.\,\mathrm{F}\ \ d\,t \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_\alpha^{\beta} \delta\,.\,\mathrm{F}_1\,\frac{d\,t}{t} \\ \left(0 < \alpha < 1 < \beta < \dfrac{a}{r_0}\right) \end{array} \right.$$

restent finies pour toutes les valeurs de r_0, positives ou nulles, les constantes α et β étant indépendantes de r_0. Alors nous écrirons :

$$(213) \qquad \left\{ \begin{array}{l} I_{r_0} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^{1} \delta\,.\,\mathrm{F}\,d\,t + \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_1^{\beta} \delta\,.\left(\mathrm{F} - \frac{\mathrm{F}_1}{t}\right) d\,t \\ \quad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\,\theta \int_\beta^{\frac{a}{r_0}} \delta\,.\left(\mathrm{F} - \frac{\mathrm{F}_1}{t}\right) d\,t + \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_{r_0}^{a} \delta\,.\,\mathrm{F}_1\,\frac{d\,s}{s}\,. \end{array} \right.$$

Pour r_0 assez petit, on pourra d'après (211) prendre la constante β assez grande pour que la troisième intégrale du second membre soit aussi petite que l'on voudra. Les deux premières intégrales, dans lesquelles $\delta\,(r_0\,t,\,\theta)$ deviendra δ_0 (densité en P_0) et où les fonctions F et F_1 seront remplacées par leurs limites $\mathrm{F}^{(0)}$ et $\mathrm{F}_1^{(0)}$ pour $r_0 = 0$, donnent, par un raisonnement élémentaire, la contribution limite suivante :

$$(214) \qquad I_1 = \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^{1} \delta_0\,\mathrm{F}^0\,d\,t + \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_1^{\infty} \delta_0 \left[\mathrm{F}^0 - \frac{\mathrm{F}^0{}_1}{t}\right] d\,t\ .$$

---

(1) Cf. Le Mémoire de M. H. Petrini : *Les dérivées premières et secondes du potentiel*. Acta Mathematica, 31, 1908, p. 127-332.

Si donc il existe une limite pour la quatrième intégrale, c'est-à-dire *si l'expression*

$$(215) \qquad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{a} \delta \,.\, F_1 \frac{ds}{s}$$

a une limite I_2 *pour* r_0 *tendant vers zéro*, (condition nécessaire et suffisante), l'expression I_{r_0} aura elle-même une limite :

$$(216) \qquad \lim I_{r_0} = I_1 + I_2 \quad .$$

Appliquons cette méthode à l'expression (209). Pour $t > 1$, il vient de suite :

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta - \theta_0) + 1}} - 1 = \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{t} + \frac{L}{t^2} ,$$

L restant fini pour $t > 1$.

Nous aurons donc ici $F_1 = \cos(\theta - \theta_0)$, et $F_2 = L$. Les conditions (212) sont évidemment vérifiées.

L'expression de I_1 nécessite d'abord le calcul de :

$$J = \int_0^1 \delta_0 \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta - \theta_0) + 1}} - 1 \right] dt$$
$$+ \int_1^{\infty} \delta_0 \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos(\theta - \theta_0) + 1}} - 1 - \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{t} \right] dt \; .$$

Cela est entièrement élémentaire, et l'on trouve de suite :

$$\frac{1}{\delta_0} J = -1 - \cos(\theta - \theta_0) - \cos(\theta - \theta_0) \log \left[\frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{2} \right]$$
$$= \frac{d}{d\theta} \left[-\sin(\theta - \theta_0) \log \frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{2} \right] .$$

On en conclut :

$$I_1 = -\delta_0 \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta - \theta_0) \log \frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{2} \right] d\theta = 0 \; .$$

Par conséquent, sous la condition, nécessaire et suffisante, que la quantité :

$$(217) \qquad \lim_{(r_0 = 0)} \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta_0)\, d\theta \int_{r_0}^{a} \delta(s, \theta) \frac{ds}{s}$$

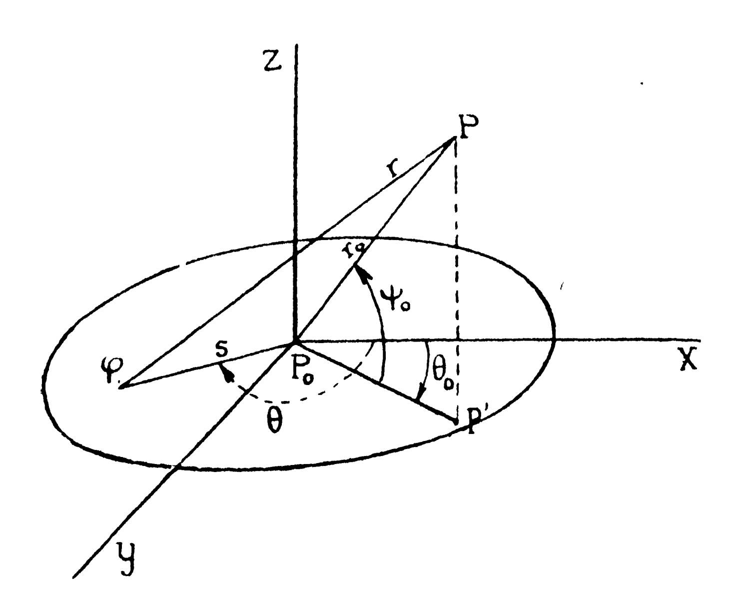
existe, la dérivée $\frac{dV}{dr_0}$ existera au point P_0, pour la direction d'argument θ_0.

Par exemple, on voit que, si δ_0 est constant, l'expression (217) est nulle, et a pour limite zéro; les dérivées tangentielles sont donc *nulles*, ce qui n'était pas difficile à prévoir.

En général, si la limite (217) existe, pour une valeur de θ_0, elle existe aussi, et change simplement de signe, pour la direction opposée, correspondant à $\theta_0 + \pi$. On en conclut, par suite, que les dérivées telles que $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ *restent continues*, (car le changement de signe indiqué correspond au fait qu'on a changé justement le sens positif sur les axes envisagés).

Si la limite existe pour deux valeurs de θ_0, elle existera alors pour toute valeur de θ_0 c'est-à-dire pour toutes les directions.

Restons toujours dans le cas d'une couche plane, et cherchons à définir la dérivée de V dans une direction arbitraire, non située



dans le plan. Nous aurons des raisonnements entièrement semblables à ceux qui précèdent. On aura ici (voir la *figure*) :

$$V_P - V_{P_0} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[\frac{\delta \, . \, s\, ds}{\sqrt{s^2 - 2\, r_0\, s \cos(P\, P_0\, Q) + r_0^2}} - \delta \, . \, ds \right].$$

C'est-à-dire la même expression que (207), en remplaçant simplement $\cos(\theta - \theta_0)$ par :

(218) $$\cos(P\, P_0\, Q) = \cos \psi_0 \cos(\theta - \theta_0)$$

où ψ_0 est la latitude du point P. Avec ce simple changement,

tout ce qui précède s'appliquera immédiatement. La condition d'existence de la dérivée de V dans la direction P_0P, sera que l'expression (217), modifiée comme on vient de dire, ou précisément :

$$\int_0^{2\pi} \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)\, d\theta \int_{r_0}^{a} \delta(s, \theta)\, \frac{ds}{s},$$

ait une limite pour r_0 tendant vers zéro. Cette condition ne diffère pas de la condition (217) pour la même valeur de θ_0. Si cette limite I'_2 existe, elle remplacera la quantité I_2 du cas précédent. Quant à la quantité I_1, elle sera remplacée, toujours en vertu de la même substitution, par :

$$(218)\quad \left\{ \begin{aligned} I'_1 = -\delta_0 \int_0^{2\pi} \Big[& 1 + \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0) \\ & + \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0) \log \frac{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)}{2} \Big]\, d\theta . \end{aligned} \right.$$

Il est tout naturel, d'après les calculs antérieurs, de chercher à mettre en évidence dans la quantité à intégrer, la dérivée de l'expression :

$$G(\theta) = \cos\psi \sin(\theta - \theta_0) \log \frac{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)}{2} ;$$

on trouve de suite :

$$1 + \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0) + \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0) \log \frac{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)}{2}$$

$$= \frac{dG}{d\theta} + \frac{\sin^2\psi_0}{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)} ,$$

et, par conséquent, on a ici :

$$(219)\qquad I'_1 = -\delta_0 \sin^2\psi_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)} .$$

En prenant par exemple $e^{i(\theta-\theta_0)} = \gamma$, il reste à calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$= \frac{2i}{\cos\psi_0} \int_{|\gamma|=1} \frac{d\gamma}{\left[\gamma - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2}\right)\right]\left[\gamma - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2}\right)\right]}$$

Supposons, par exemple $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$; le seul pôle situé dans la circonférence $|\gamma| = 1$ est $\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2}\right)$, avec un résidu égal à $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\psi_0$. Le théorème de Cauchy nous fournit donc :

$$\Gamma_1 = -2\pi\delta_0 \sin\psi_0 \,.$$

D'où, pour la dérivée dans la direction r_0 :

$$\frac{dV}{dr_0} = -2\pi\delta_0 \sin\psi_0 + \lim_{r_0=0}\int_0^{2\pi}\cos\psi_0\cos(\theta-\theta_0)\,d\theta\int_{r_0}^{a}\delta(s,\theta)\frac{ds}{s} \,.$$

On voit immédiatement que, si cette dérivée existe pour une direction issue de P_0, elle existera aussi pour toute direction située dans le plan passant par $P_0 z$ et par la première direction considérée.

Pour une direction tangentielle $(\psi_0 = 0)$ on retrouve les résultats antérieurs.

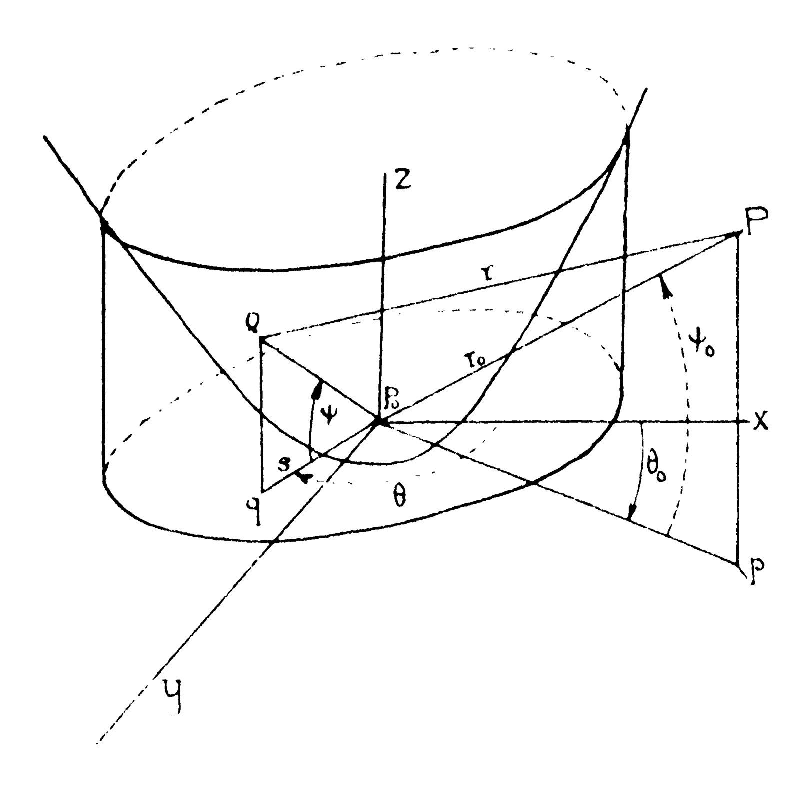
Pour la direction *normale* $\left(\psi_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, la condition d'existence se trouve réalisée d'elle-même à cause de la présence du facteur $\cos\psi$. Il y a donc toujours une dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial z}$, ce qui correspond bien au théorème obtenu directement plus haut. Et la discontinuité de cette dérivée apparaît immédiatement : pour éviter la petite complication qui pourrait résulter de l'hypothèse faite sur ψ_0 dans la fin du calcul, revenons à Γ_1 tel qu'il est donnée par (219).

Pour $\psi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, on aura $\Gamma_1 = \mp 2\pi\delta_0$, et c'est cette valeur qui se réduira $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ pour les deux directions de r_0 portées par oz et par la demi-droite opposée. En les rapportant toutes deux à la même direction oz, on voit bien que la dérivée $\frac{\partial V}{dz}$ subira une discontinuité égale à $4\pi\delta_0$.

Cas de la surface courbe. — Les considérations qui précèdent facilitent beaucoup l'étude du cas général. Nous supposerons toutefois que, au point P_0 de la surface Σ que nous considérerons, la surface soit régulière, et munie d'un plan tangent unique, que nous prendrons pour plan des xy.

Dans ce plan tangent, nous tracerons une circonférence de centre P_0 et de rayon a, et nous ferons passer un cylindre parallèle à oz, par cette circonférence. Nous délimiterons ainsi

une portion de la surface Σ, comprise au voisinage de P_0 dans l'intérieur de ce cylindre. Comme antérieurement, toutes les difficultés se produisant au voisinage de P_0 proviennent exclusivement de la portion de la surface ainsi définie. Nous examinerons donc seulement



cette portion, et seulement la portion qui lui correspond dans le potentiel $V = \iint \frac{\delta\, d\sigma}{r}$. La densité δ est encore supposée continue, et, pour simplifier l'exposé, nous admettrons qu'une parallèle à oz rencontrant le cercle, ne rencontre la portion de Σ considérée qu'en un point. Enfin, nous poserons dans cette région :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\cos nz} \tag{220}$$

n étant la normale à Σ (celle qui coïncide avec P_0z en P_0, suivie par continuité). Nous admettrons encore que ε reste, dans toute la région en question, finie et bien déterminée ; (il n'y a donc pas, au voisinage, de plan tangent à Σ qui soit parallèle à oz).

Cela étant, la différence des potentiels en P et en P_0 sera ici :

$$V_P - V_{P_0} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \varepsilon(s, \theta) \left(\frac{1}{PQ} - \frac{1}{P_0 Q} \right) s\, ds \,,$$

Q étant le point qui décrit la région de Σ envisagée ; s, θ étant les coordonnées polaires de sa projection, et ψ sa latitude (voir la *figure*). On a :

$$P_0Q = \frac{s}{\cos\psi} \qquad PQ = \sqrt{\overline{P_0Q}^2 + r_0^2 - 2r_0 \cdot P_0Q \cdot \cos PP_0Q}$$

Comme les cosinus directeurs de P_0P et de P_0Q sont respectivement :

$\cos\psi_0 \cos\theta_0$, $\cos\psi_0 \sin\theta_0$, $\sin\psi_0$; $\cos\psi\cos\theta$, $\cos\psi\sin\theta$, $\sin\psi$

on a :

$$(221) \qquad \cos(PP_0Q) = \sin\psi\sin\psi_0 + \cos\psi\cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0) .$$

Posons maintenant, comme plus haut (éq. 208) :

$$s = r_0\, t \quad ,$$

il viendra :

$$(222) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0}(V_P - V_{P_0}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{r_0}} \varepsilon(r_0\, t, \theta) \\ &\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos(PP_0Q) + \cos^2\psi}} - 1\right]\cos\psi\, dt . \end{aligned} \right.$$

Cette expression est tout à fait analogue à celle qui figure dans le second membre de (209), et nous la traiterons exactement de même, en observant que pour $t > 1$, on a :

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos(PP_0Q) + \cos^2\psi}} - 1 = \frac{\cos\psi\cos(PP_0Q)}{t} + \frac{L'}{t^2} ,$$

L' étant fini pour $t > 1$.

Nous aurons affaire à une expression du type (210), avec $F_1 = \cos^2\psi\cos(PP_0Q)$ et $F_2 = L'\cos\psi$. Les conditions d'application de la méthode de Petrini sont, évidemment, encore réalisées, et nous en déduirons immédiatement le résultat suivant :

La limite de la quantité (222) existera sous la condition, nécessaire et suffisante, que la quantité :

$$(223) \qquad A = \lim_{r_0 = 0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{a} \varepsilon(s, \theta)\cos^2\psi\cos(PP_0Q)\,\frac{ds}{s}$$

existe ; et elle sera alors égale à la somme $A + B$, B désignant la limite, certainement existante, de la quantité :

$$C \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \varepsilon(r_0 t, \theta) \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos \mathrm{PP_0Q} + \cos^2\psi}} - 1 \right] \times$$

$$\cos\psi\, dt + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\frac{a}{r_0}} \varepsilon(r_0 t, \theta) \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos \mathrm{PP_0Q} + \cos^2\psi}} \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{\cos\psi\cos \mathrm{PP_0Q}}{t} \right] \cos\psi\, dt\,.$$

Dans ces dernières intégrations, ψ est la fonction $\psi(s, \theta)$ qui est définie par la donnée de la surface Σ. Si nous faisons le changement de variable $s = r_0 t$, et que nous passions à la limite, $\varepsilon(r_0 t, \theta)$ deviendra ε_0, densité à l'origine (d'après la relation (220)), et ψ deviendra nul dans tous les azimuts, puisque nous avons admis l'existence d'un plan tangent unique ; la formule (221) nous donnera alors pour $\cos \mathrm{PP_0Q}$ l'expression $\cos\psi_0 \cos(\theta - \theta_0)$. On aura donc :

$$B = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \int_0^1 \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0) + 1}} - 1 \right] dt \right.$$

$$\left. + \int_1^{\infty} \left[\frac{t}{\sqrt{\quad}} - 1 - \frac{\cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0)}{t} \right] dt \right\}.$$

Le calcul des intégrales par rapport à t a déjà été fait plus haut, à propos de la formule (216). On a donc :

$$B = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0) + \cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0) \right.$$

$$\left. \log \frac{1 - \cos\psi_0\cos(\theta - \theta_0)}{2} \right] d\theta\,.$$

B ne diffère pas de l'expression (218), et sa valeur est :

(224) $$B = -2\pi\,\varepsilon_0 \sin\psi_0$$

en supposant, par exemple, $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. $\Big($On changera le signe si $-\frac{\pi}{2} < \psi_0 < 0\Big)$.

Revenons maintenant à l'expression de A. On pourra l'écrire, d'après (221) :

(225) $$A = A_1 \cos\psi_0 + A_2 \sin\psi_0\,,$$

avec :

$$(226)\quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \lim_{r_0=0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{a} \varepsilon(s, \theta) \cos^3 \psi \cos(\theta - \theta_0) \frac{ds}{s} . \\ A_2 &= \lim_{r_0=0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{a} \varepsilon(s, \theta) \sin \psi \cos^2 \psi \frac{ds}{s} . \end{aligned} \right.$$

En ce qui concerne les *dérivées tangentielles*, qui seront fournies par la limite du rapport (222) lorsque $\psi_0 = 0$, on voit que la seule quantité qui interviendra dans $A + B$ sera A_1, B sera nul ainsi que le coefficient de A_2. Si A_1 existe pour une direction θ_0, il existera pour la direction opposée $(\theta_0 + \pi)$, et on voit comme plus haut, que la *dérivée tangentielle*, estimée toujours avec le même sens positif, *reste continue*. Si A_1 existe pour deux valeurs de θ^0 (dont la différence ne soit pas un multiple de π), il existe pour toutes les directions.

Quant à la dérivée normale, elle vaudra, dans le sens des z positifs, $B + A_2$, et dans le sens des z négatifs, $B - A_2$; seulement dans le premier cas B est égal à $-2\pi\delta_0$ car ψ_0 vaut $\frac{\pi}{2}$, et dans le second cas, B est égal à $-2\pi\delta_0$ également, car dans (224) il faut alors changer le signe du second membre $\left(\psi_0 = -\frac{\pi}{2}\right)$. Évaluant les dérivées normales positivement dans la direction $P_0 z$, on voit qu'on retrouve la discontinuité $-4\pi\delta_0$ quand on passe de l'extérieur vers l'intérieur de la surface Σ.

Il semble, à première vue, qu'il y ait contradiction entre le thérème démontré directement jadis à propos de la dérivée normale, et le résultat que nous venons d'énoncer, lequel nécessite l'existence de la limite A_2. Mais, en fait, cette dernière limite existe toujours pour les surfaces envisagées dans notre premier théorème, puisque $\sin \psi$ s'annule comme s en P_0, en même temps que s, ce qui assure à l'intégrale A_2 une valeur déterminée et finie, même lorsque r_0 devient nul.

Exemple. — En appliquant les formules générales au cas d'une couche de densité constante δ_0 étalée sur une sphère de rayon α, on voit de suite qu'on a :

$$\varepsilon = \frac{\delta_0}{\cos 2\psi} , \qquad s = \alpha \sin 2\psi ,$$

de sorte que l'existence des dérivées tangentielles dépend de l'existence d'une limite A_1, c'est-à-dire pour l'expression :

$$2\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta_0)\, d\theta \int_{\psi_1}^{\psi_2} \delta_0 \frac{\cos^3\psi}{\sin 2\psi}\, d\psi ,$$

ψ_1 et ψ_2 étant les arcs qui correspondent à $s = r_0$ et à $s = a$. Or il est clair que cette expression est nulle et, par suite aussi sa limite quand ψ_1 tend vers zéro (et r_0 vers zéro).

Discontinuité d'une dérivée oblique. — Revenons aux formules (224)-(226). Comme on passe d'une direction $P_0 P$ à la direction opposée, en changeant ψ_0 et θ_0 en $-\psi_0$ et $\theta_0 + \pi$, on voit que les limites cherchées existent en même temps pour ces deux directions; l'équation (225) prouve que les valeurs de A correspondantes seront opposées, ce qui montre, d'après une remarque ci-dessus, que la portion de la dérivée qui correspond à A ne subira pas de discontinuité en traversant la surface. Au contraire, le raisonnement, déjà connu, effectué sur B, prouve que cette expression, et, par suite, la dérivée dans une direction de latitude ψ_0, subira une discontinuité égale à $-4\pi\delta_0 \sin\psi_0$, ou encore à $-4\pi\delta_0 \cos(P P_0 z)$. C'est un résultat qui nous sera très utile ultérieurement.

Remarque. Pour être tout à fait complet, même en se bornan au cas envisagé (surface Σ à points simples, densité continue) il y aurait encore lieu d'examiner si, pour une dérivée tangentielle, par exemple prise suivant ox, la limite, supposée existante, du rapport $\dfrac{V_{P_0} - V_P}{P_0 P}$ que nous avons considéré, est aussi la limite de la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, prise au point P, lorsque ce dernier point tend vers P_0. Nous renverrons, pour les détails qui se rapportent à cet examen, au mémoire de M. Petrini, notamment pp. 236 et suivantes.

CHAPITRE XIII

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE L'HYDRODYNAMIQUE
ou Équations de M. C.-W. Oseen

Nous allons maintenant entreprendre d'exposer la théorie de M. C. W. Oseen sur l'hydrodynamique des fluides visqueux. Cette théorie prend son point de départ dans un certain système d'équations intégrales, que M. Oseen a déduites des équations générales, aux dérivées partielles, démontrées au Chapitre IX.

Nous nous bornerons aux mouvements *lents*, ou bien aux mouvements *à tourbillons négligeables*, car nous avons constaté que ces deux sortes de mouvements étaient régis par des équations du même type :

$$
(227)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\
\rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\
\rho \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ,
\end{aligned}
\right.
$$

avec cette seule différence que la lettre p représente la pression moyenne dans le premier cas, et cette même pression augmentée de $\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ dans le second. (cf. Chapitre IX, fin). Nous admettrons enfin qu'il n'y a pas de forces extérieures notables, ce qui correspond à l'absence des termes X, Y, Z, dans les équations (227). Nous ne faisons cette hypothèse que pour simplifier les écritures, car il est très facile d'ajouter, et de traiter comme les autres, les termes correspondants.

Cela étant, nous allons utiliser les équations, dites *adjointes* des équations (227), que voici :

$$(228)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu\,\Delta u' \\ &\rho\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu\,\Delta v' \\ &\rho\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \mu\,\Delta w' \\ &\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

La théorie que nous allons établir est au fond une généralisation des propriétés de l'équation de la chaleur et de son équation adjointe, et les formules que nous allons obtenir sont, en somme, une sorte de généralisation de la formule (294) que nous avions obtenue au Chapitre XI pour une solution de l'équation de la chaleur.

Il nous faut commencer par déterminer un système — ou même plusieurs — de solutions des équations (228), qui soit de nature à jouer un rôle analogue à celui de la *solution fondamentale* (187) du problème simple que nous venons de rappeler.

Nous poserons dans ce qui suit, $(x\,y\,z)$, $(x'\,y'\,z')$, $(x_0\,y_0\,z_0)$, étant trois points du fluide envisagé, t et t_0 deux instants, pour le moment quelconques

$$(229)\quad \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,, \\ r' &= \sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(230)\quad E(r,t) = \frac{1}{\sqrt{t-t_0}}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu(t-t_0)}}$$

A la notation près, E reproduit la fonction fondamentale $u_1(z,t)$ (équation 187) de l'équation de la chaleur, et nous avons déjà constaté, par conséquent, qu'elle satisfait à l'équation ci-jointe

$$(231)\quad \rho\frac{\partial E}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = 0\,,$$

en tant que fonction de r et de t.

Cela étant rappelé, nous voyons que nous satisferons certainement à la quatrième équation du système (228), si nous posons, $P(x, y, z, t)$ étant quelconque,

$$(232)\quad u' = -\Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\,,\quad v' = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\,,\quad w' = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}$$

Transportons ces valeurs dans les trois premières équations du même système, elles s'écriront facilement :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|p' - \mu\,\Delta\,\frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial t}\right| + \Delta\left(\mu\,\Delta\,P + \varepsilon\,\frac{\partial P}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left|p' - \mu\,\Delta\,\frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial t}\right| = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left|p' - \mu\,\Delta\,\frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial t}\right| = 0$$

et ces dernières seront certainement vérifiées si nous définisons p' par l'équation

(233) $$p' = \frac{\partial}{\partial x}\left|\varepsilon\,\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\,\Delta\,P\right|$$

P étant lui-même assujetti à satisfaire à l'équation

(234) $$\Delta\left(\varepsilon\,\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\,\Delta\,P\right) = 0\ .$$

La fonction $E(r, t)$, va nous servir à former une solution P de cette équation ; nous chercherons P ne dépendant que des variables r et t, et pour abréger l'exposé, nous vérifierons simplement qu'on peut prendre

(235) $$P = \frac{1}{r}\int_{r'}^{r} E(\xi, t)\,d\xi\ ,$$

r' étant une constante indépendante de r.

En effet, on sait, — ou il est facile de voir — que pour une fonction de x, y, z, où ces lettres n'entrent que par l'intermédiaire de r, on a

$$\Delta\,P = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial P}{\partial r}$$

on trouve alors

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\int_{r'}^{r} E(\xi, t)\,d\xi + \frac{1}{r}\,E(r, t)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}\int_{r'}^{r} E(\xi, t)\,d\xi - \frac{2}{r^2}\,E(r, t) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E(r, t)}{\partial r}$$

donc

(236) $$\Delta\,P = \frac{1}{r}\,\frac{\partial E(r, t)}{\partial r}\ .$$

D'autre part il vient, en utilisant (231),

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} = \frac{1}{r} \int_{r'}^{r} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}\, \partial \xi = -\frac{\mu}{\rho r} \int_{r'}^{r} \frac{\partial^2 \mathrm{E}(\xi, t)}{\partial \xi^2}\, d\, \xi$$

$$= \frac{\mu}{\rho r} \left[\frac{\partial \mathrm{E}(r', t)}{\partial r'} - \frac{\partial \mathrm{E}(r, t)}{\partial r} \right].$$

Et par suite

$$(237) \qquad \rho \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \mu \Delta \mathrm{P} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial \mathrm{E}(r', t)}{\partial r'}$$

Et comme $\frac{1}{r}$ est une solution de l'équation $\Delta \frac{1}{r} = 0$, on voit bien évidemment que P vérifie l'équation (234).

Observons de suite que, *dans le cas particulier où* $r' = 0$, il résulterait immédiatement de l'équation (237), que P serait alors solution de l'équation

$$(238) \qquad \rho \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \mu \Delta \mathrm{P} = 0$$

car

$$\frac{\partial \mathrm{E}(r', t)}{\partial r'}$$

s'annule pour $r' = 0$.

En mettant en évidence la lettre r' qui dans tout ceci joue le rôle d'une simple constante, nous avons ainsi un groupe de fonctions qui vérifient les équations adjointes (228). De simples permutations circulaires en fournissent immédiatement deux autres. Ces trois groupes sont résumés par le tableau suivant :

$$\mathrm{P}(r') = \frac{1}{r} \int_{r'}^{r} \mathrm{E}(\xi, t)\, d\, \xi,$$

$$(239) \quad \begin{cases} u'_1 = -\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}(r')}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial z^2}, \quad v'_1 = \dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\, \partial y}, \quad w'_1 = \dfrac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\, \partial z} \\[2ex] p'_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} \left[\rho \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \mu \Delta \mathrm{P} \right] = \mu \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{\partial \mathrm{E}(r', t)}{\partial r'} \end{cases}$$

$$u'_2 = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x\, \partial y}, \quad v'_2 = -\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x^2}, \quad w'_2 = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial y\, \partial z},$$

$$
(239)\quad \left\{
\begin{aligned}
p'_2 &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \, \Delta \, P\right] = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial E(r', t)}{\partial r'} \\
u'_3 &= \frac{\partial^2 P}{\partial x \, \partial z}, \quad v'_3 = \frac{\partial^2 P}{\partial y \, \partial z}, \quad w'_3 = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \\
p'_3 &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\; \ldots\ldots \;\right] = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial E(r' t)}{\partial r'}
\end{aligned}
\right.
$$

Dans des développements ultérieurs, nous aurons besoin des expressions développées de ces quantités. On trouve par des calculs élémentaires, et pour le premier groupe par exemple :

$$
(240)\quad \left\{
\begin{aligned}
u'_1 &= -\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{r^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial r}\left(\frac{1}{r} + \frac{(x - x_0)^2}{r^3}\right) \\
&\quad - \frac{1}{r^2}\left(\frac{3(x - x_0)^2}{r^2} - 1\right)\left[P(r') - E(r, t)\right] \\
&\quad + \frac{\rho}{2\mu}\left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{r^2}\right) \frac{E(r, t)}{t_0 - t} \\
v'_1 &= \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{r^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right] \\
&\quad + \frac{3(x - x_0)(y - y_0)}{r^4}\left[P(r') - E(r, t)\right] \\
&\quad - \frac{\rho}{2\mu} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{r^2} \frac{E(r, t)}{t_0 - t} \\
w'_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3(x - x_0)(z - z_0)}{r^4}\left[P(r') - E(r, t)\right] \\
&\quad - \frac{\rho}{2\mu} \frac{(x - x_0)(z - z_0)}{r^2} \frac{E(r, t)}{t_0 - t} \\
p'_1 &= \rho \frac{r'(x - x_0)}{2 r^3} \frac{E(r', t)}{t_0 - t}.
\end{aligned}
\right.
$$

On a les autres valeurs explicitées par des formules analogues, en permutant le rôle des lettres.

Les discontinuités qui interviennent dans ces fonctions pour $t = t_0$ et $r = 0$ sont en évidence.

Avant d'utiliser ces résultats, nous formerons un quatrième groupe de fonctions accentuées, vérifiant les équations adjointes (228). Il est clair que nous obtiendrons des expressions satisfaisant à la dernière

de ces équations, et annulant les termes en $\Delta u'$ $\Delta v'$, $\Delta w'$, si nous posons, $A(t)$ étant une fonction de t quelconque,

$$u' = A(t)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad v' = A(t)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad w' = A(t)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

$$\left(\text{puisque} \quad \Delta \frac{1}{r} = 0 \right).$$

Les trois premières équations (228) se réduisent à

$$\varepsilon \frac{dA(t)}{dt}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \ldots\ldots, \quad \ldots .$$

et elles permettent de prendre

$$p' = -\frac{\varepsilon}{r}\frac{dA(t)}{dt}.$$

En vue de munir u', v', w', p', de la discontinuité analogue à celle de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, nous choisirons

$$A(t) = -\frac{\varepsilon r'}{2}\frac{E(r', t)}{t_0 - t},$$

et nous obtiendrons le quatrième groupe

$$(241) \quad \begin{cases} u'_4 = -\dfrac{\varepsilon r'}{2}\dfrac{E(r', t)}{t_0 - t}\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, & v'_4 = -\dfrac{\varepsilon r'}{2}\dfrac{E(r', t)}{t_0 - t}\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \\[2ex] w'_4 = -\dfrac{\varepsilon r'}{2}\dfrac{E(r', t)}{t_0 - t}\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}; & p'_4 = \dfrac{\varepsilon^2 r'}{2r}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{E(r', t)}{t_0 - t}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant mettre en œuvre ces diverses solutions.

Considérons une portion de fluide, où le mouvement soit continu, délimitée par une surface $S(t)$ que nous supposerons par exemple fermée (il pourrait y avoir plus d'une surface limitant notre volume $\omega(t)$, sans autre complication que d'écriture). Soit $(x_0\ y_0\ z_0)$ un point de ce domaine, Σ la sphère de centre $(x_0\ y_0\ z_0)$ et de rayon r'. Supposons que, t variant de 0 à t_0, le domaine $\omega(t)$ contienne constamment la sphère Σ à son intérieur. Enfin appelons $\omega(r')$ le domaine ω dont on a retranché la sphère Σ

Les vitesses u, v, w , et la pression moyenne p dans le fluide, satisfont aux équations (227) et sont continues dans $\omega(r')$; les fonctions $u'_1\ v'_1\ w'_1\ p'_1$ satisfont aux équations (228) et sont continues dans le même domaine. Multiplions alors les équations (227) par $u'_1, v'_1, w'_1, 0$, les équations (228) par $u, v, w, 0,$ et retranchons les résultats obtenus. Il vient

$$(242)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho \frac{\partial}{\partial t}(u u'_1 + v v'_1 + w w'_1) = - u'_1 \frac{\partial p}{\partial x} - v'_1 \frac{\partial p}{\partial y} - w'_1 \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ u \frac{\partial p'}{\partial x} + v \frac{\partial p'}{\partial y} + w \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \,|\, u'_1 \Delta u + \ldots - u \Delta u'_1 \ldots \,|. \end{aligned} \right.$$

Ceci est exactement l'analogue de ce que nous avons fait au Chapitre XI pour obtenir l'équation (190). Nous allons faire subir à cette équation (242) un traitement tout à fait pareil à celui qui nous a servi déjà pour la formule que je viens de rappeler.

Nous allons intégrer les deux membres de (242) dans tout le volume $\omega(r')$, pour intégrer encore le résultat par rapport à t , de 0 à t_0 . Puis nous chercherons ce que devient la formule obtenue, quand on y fait tendre r' vers zéro.

L'opération que nous venons de décrire nécessite quelques précautions.

Je rappelle tout d'abord quelques formules de transformations que nous allons avoir à utiliser : on sait que, les fonctions à intervenir étant supposées certaines ainsi que les dérivées convenables, on a :

$$(243)\quad \iiint_{vol.} \frac{\partial F}{\partial x}\, d\omega = - \iint_{surf.\ lim.} \cos n_i x\, d\sigma \text{ (formule de Green)}$$

$d\omega$ étant l'élément de volume, et n_i la normale à la surface limite, vers l'intérieur.

La formule

$$(244)\quad \left\{ \begin{aligned} \iiint_{vol.} G \frac{\partial F}{\partial x}\, d\omega = - \iiint_{vol.} F \frac{\partial G}{\partial x}\, d\omega \\ - \iint_{surf.} FG \cos n_i x\, d\sigma \end{aligned} \right.$$

ne diffère pas de la précédente, où l'on a remplacé F par F . G . Et de celle-ci on déduit, en remplaçant F par $\frac{\partial F}{\partial x}$ et ajoutant

trois équations analogues à celle obtenue, puis opérant par échange des lettres F et G, et retranchant :

$$(245)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint_{\text{vol.}} (F \Delta G - G \Delta F)\, d\omega = \\ &-\iint_{\text{surf.}} \left(F \frac{dG}{dn_i} - G \frac{dF}{dn_i} \right) d\sigma \end{aligned} \right.$$

Rappelons enfin comment on calcule la dérivée par rapport à t, d'une intégrale de volume telle que

$$J(t) = \iiint_{\omega(t)} \alpha(x, y, z, t), d\omega$$

étendue à un volume $\omega(t)$ qui dépend de t. Le raisonnement intuitif ci-dessous, qu'il est aisé de rendre rigoureux, conduit immédiatement à la formule cherchée. Entre deux instants voisins t_1 et t_2 formons la différence

$$J(t_2) - J(t_1) = \iiint_{\omega(t_1)} [\alpha(x, y, z, t_2) - \alpha(x, y, z, t_1)]\, d\omega$$

$$+ \iiint_{\omega(t_2) - \omega(t_1)} \alpha(x, y, z, t_2)\, d\omega\,.$$

Après division par $t_2 - t_1$, le premier terme du second membre fournira à la limite

$$\iiint_{\omega(t_1)} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, y, z, t_1)\, d\omega$$

quant au dernier terme, c'est une intégrale triple étendue à la couche comprise entre les deux surfaces limites $S(t_1)$ et $S(t_2)$; si l'on désigne par V_{ni} la vitesse normale de déplacement (positive vers l'intérieur de $S(t_1)$), de $S(t_1)$ vers $S(t_2)$, cette intégrale triple est la limite de la somme

$$\Sigma\, \alpha(x, y, z, t_2)\, d\sigma \times V_{ni} \times (t_2 - t_1)$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface sur $S(t_1)$. Après division par $t_2 - t_1$, on voit donc apparaître à la limite l'intégrale

$$-\iint_{S(t_1)} \alpha(x, y, z, t_1)\, V_{ni}\, d\sigma$$

On a donc la formule

$$(246)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega(t)} \alpha\,(x,\,y,\,z,\,t)\; d\omega &= \iiint_{\omega(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t}\,(x,\,y,\,z,\,t)\; d\omega \\ &- \iint_{S(t)} \alpha\,(x,\,y,\,z,\,t)\; V_{ni}\; d\sigma \end{aligned} \right.$$

que nous utiliserons sous la forme suivante, obtenue en intégrant les deux membres par rapport à t, de 0 à t_0.

$$(247)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{t_0} dt \iiint_{\omega(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t}\,(x,\,y,\,z,\,t)\; d\omega &= \iiint_{\omega(t_0)} \alpha\,(x,\,y,\,z,\,t_0)\; d\omega \\ - \iiint_{\omega(0)} \alpha\,(x,\,y,\,z,\,0)\; d\omega &+ \int_0^{t_0} dt \iint_{S(t)} \alpha\,(x,\,y,\,z,\,t),\; V_{ni}\; d\sigma\ . \end{aligned} \right.$$

Revenons maintenant à notre formule (242) et intégrons comme nous l'avons dit, dans le volume $\omega\,(r')$ et ensuite par rapport au temps t, de 0 à t_0. En appliquant au premier membre la formule (247), et transformant légèrement le second membre par les formules (244) et (245), tout en profitant de ce que $(u,\,v,\,w)$ et $(u_1',\,v_1',\,w_1')$ satisfont à l'équation de continuité, il vient sans peine le résultat suivant :

$$(248)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho \iiint_{\omega(r',t_0)} |u u'_1 + v v'_1 + w w'_1|\; d\omega \\ &\rho \iiint_{\omega(r',0)} |u u'_1 + v v'_1 + w w'_1|\; d\omega \\ &+ \rho \int_0^{t_0} dt \iint_{S(t)} |u u'_1 + v v'_1 + w w'_1|\; V_n\; d\sigma = \\ &\int_0^{t_0} dt \iint_{S(t)} \Big| u'_1 \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) \\ &+ v'_1 \left(\mu \frac{dv}{dn} - p \cos ny \right) + w'_1 \left(\mu \frac{dw}{dn} - p \cos nz \right) \Big|\; d\sigma \\ &+ \int_0^{t_0} dt \iint_{S(t)} \left[u \left(\mu \frac{du'_1}{dn} - p'_1 \cos nx \right) + \ldots\ldots \right] d\sigma \\ &- \int_0^{t_0} dt \iint_{\Sigma} \left[u'_1 \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \ldots\ldots \right] d\sigma \\ &+ \int_0^{t_0} dt \iint_{\Sigma} \left[u \left[\mu \frac{du'_1}{dn} - p'_1 \cos nx \right) + \ldots\ldots \right] d\sigma\ . \end{aligned} \right.$$

Car le volume $\omega\,(r')$ est délimité par deux surfaces : $S\,(t)$ et Σ.

Dans cette formule, n désigne la normale à une surface frontière, dirigée vers l'*intérieur* du volume $\omega\,(r')$

Au premier membre le premier terme disparait, car pour $t = t_0$, u'_1, v'_1, w'_1 s'annulent tous trois dans $\omega(r')$, de même que E, P et leurs dérivées.

Nous allons nous préoccuper de chercher ce que devient cette formule (248) lorsqu'on y fait tendre r' vers zéro.

Examinons tout d'abord les deux dernières intégrales du second membre, — celles qui sont relatives à la sphère Σ. Sur Σ les formules (240) où $r = r'$ et par suite $P = 0$, se réduisent à

$$u'_1 = -\frac{1}{r'^2}\left|\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2} - 1\right| E(r',t)$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\mu}\left|1 - \frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right| \frac{E(r',t)}{t_0 - t}$$

$$v'_1 = -\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r'^4} E(r',t)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2\mu}\,\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r'^2}\,\frac{E(r',t)}{t_0-t}$$

$$w'_1 = -\frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r'^4} E(r',t)$$

$$-\frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{(x-x_0)(z-z_0)}{r'^2}\,\frac{E(r',t)}{t_0-t}$$

En développant, d'autre part, p et $\frac{du}{dn}$, au voisinage du point (x_0, y_0, z_0), on aura sur Σ des écritures telles que

$$\frac{du}{dn} = \frac{x-x_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{y-y_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{z-z_0}{r'}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$$

$$+ r' A, \quad \ldots \quad , p = p_0 + r' A,$$

la lettre A désignant différentes fonctions qui restent finies.

Prenons l'intégrale

$$\int_0^{t_0} dt \iint_\Sigma \left[u'_1\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \ldots\right] d\sigma .$$

Les termes en $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$, ... p_0, donneront évidemment zéro, étant impairs en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$. Les seuls termes à envisager seront de la forme

$$\int_0^{t_0} A \,.\, r' \,.\, E(r',t)\, dt$$

ou

$$\int_0^{t_0} \mathrm{A} \, . \, r'^3 \, \frac{\mathrm{E}(r', t)}{t_0 - t} \, dt$$

et nous cherchons leurs valeurs limites quand r' tend vers zéro.

Séparons ces intégrales en deux portions :

$$\int_0^{t_1} \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_0}$$

avec $0 < t_1 < t_0$. Si t_1 est un nombre fixé inférieur à t_0, les parties correspondant à l'intervalle $(0, t_1)$ ne donneront aucune difficulté, et tendront vers zéro avec r'. Je dis qu'il en sera de même des intégrales $\int_{t_1}^{t_0}$; cela résulte en effet de ce que le coefficient de r' et de r'^2, c'est-à-dire les intégrales

$$\int_{t_1}^{t_0} \mathrm{E}(r', t) \, dt \quad \text{et} \quad r' \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{E}(r', t)}{t_0 - t} \, dt$$

sont finies : on a en effet d'après (230)

$$\int_{t_1}^{t_0} \mathrm{E}(r', t) \, dt < \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t_0 - t}} = 2 \sqrt{t_0 - t_1}$$

$$r' \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{E}(r', t)}{t_0 - t} \, dt = r' \int_{t_1}^{t_0} e^{-\frac{\rho r'^2}{4\mu(t_0 - t)}} \frac{dt}{(t_0 - t)^{3/2}}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \int_{\frac{r'}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t_0 - t_1)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} \, d\lambda < 4 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \, d\lambda = 2 \sqrt{\frac{\mu \pi}{\rho}}$$

En définitive l'intégrale

$$\int_0^{t_0} dt \iint_{\Sigma} \left[u'_1 \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx \right) + \ldots \right] d\sigma$$

tend donc vers zéro avec r'

Passons à la seconde expression

$$(249) \qquad \mathrm{I} = \int_0^{t_0} dt \iint_{\Sigma} \left[u \left(\mu \frac{du'_1}{dn} - p'_1 \cos nx \right) + \ldots \right] d\sigma \, .$$

En partant des formules (240) un calcul élémentaire fournit, sur Σ , les expressions :

(250)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{du'_1}{dn} &= \frac{2}{r'^3}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)E(r',t) \\ &+ \frac{\rho}{2\mu r'}\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)\frac{E(r',t)}{t_0-t} \\ &- \frac{\rho^2 r'}{4\mu^2}\left(1-\frac{(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{E(r',t)}{(t_0-t)^2} \\ \frac{dv'_1}{dn} &= \frac{9(x-x_0)(y-y_0)}{r'^5}E(r',t) \\ &+ \frac{3\rho(x-x_0)(y-y_0)}{2\mu r'^3}\frac{E(r',t)}{t_0-t} \\ &+ \frac{\rho^2(x-x_0)(y-y_0)}{4\mu^2 r'}\frac{E(r',t)}{(t_0-t)^2} \; ; \; \frac{dw'_1}{dn} = \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs

(251)
$$p'_1 = \frac{\varepsilon(x-x_0)}{2r'^2}\frac{E(r',t)}{t_0-t}$$

et

(252)
$$\left\{\begin{aligned} u &= u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \\ &+ (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + A\,.\,r'^2 \;,\; v = \;,\; w = \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Transportons dans I , et intégrons d'abord sur Σ On constate que les termes en

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 , \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \ldots\ldots$$

contenant les dérivées premières, disparaissent comme étant impairs en $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$. Au contraire les termes en u_0, v_0, w_0, sont pairs, et il y a lieu de les calculer. Le coefficient de u_0 est, d'après (250) et (251)

$$\frac{2\mu\,E(r',t)}{r'^3}\iint_\Sigma\left(\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)d\sigma$$
$$+\;\frac{\varepsilon}{2r'}\,\frac{E(r',t)}{t_0-t}\iint_\Sigma\left(\frac{2(x-x_0)^2}{r'^2}-1\right)d\sigma$$

$$- \frac{\rho^2 r'}{4\mu} \frac{E(r', t)}{(t_0 - t)^2} \iint_\Sigma \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{r'^2}\right) d\sigma \quad ;$$

en vertu de l'égalité évidente :

$$\iint_\Sigma (x - x_0)^2 \, d\sigma = \frac{1}{3} \iint_\Sigma r'^2 \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi r'^4 \quad ,$$

ceci se réduit à

$$- \frac{2\pi}{3} \rho r' \frac{E(r', t)}{t_0 - t} - \frac{2\pi}{3} \rho^2 \frac{r'^3}{\mu} \frac{E(r', t)}{(t_0 - t)^2} \quad .$$

Les coefficients de v_0 et w_0 sont nuls, parce que les intégrales

$$\iint_\Sigma (x - x_0)(y - y_0) \, d\sigma \quad \text{et} \quad \iint_\Sigma (x - x_0)(z - z_0) \, d\sigma$$

le sont.

Enfin il restera des termes provenant de la dernière partie, Ar'^2, de $u, v,$ ou w. Ces termes fourniront dans l'intégration par rapport à t_1 une contribution nulle quand r' tendra vers zéro, en vertu de raisonnements entièrement semblables à ceux qui ont été développés un peu plus haut.

En définitive l'expression I (équat. 249) nous fournira une expression que nous écrirons sous la forme

$$(253) \qquad - \frac{2\pi\rho}{3} \lim_{r'=0} \left[\frac{\rho r'^3}{\mu} \int_0^{t_0} \frac{u_0 E(r', t)}{(t_0 - t)^2} dt + r' \int_0^{t_0} \frac{u_0 E(r', t)}{(t_0 - t)} dt \right] ;$$

u_0, qui provient de la formule (252), représente $u(x_0, y_0, z_0, t)$. Les intégrales prises entre O et t_1 ; où t_1 est plus petit que t_0, donneront une part nulle à la limite, et il suffira de considérer dans (253) les intégrales prises entre t_1 et t_0 ; t_1 étant pris, indépendamment de r', assez voisin de t_0, u_0 sera alors sensiblement égal à $u_0(v_0, x_0, y_0, z_0)$. Par ailleurs on a, moyennant un changement de variable évident :

$$\rho \frac{r'^3}{\mu} \int_{t_1}^{t_0} \frac{E(r', t)}{(t_0 - t)^2} dt + r' \int_{t_1}^{t_0} \frac{E(r', t)}{t_0 - t} dt$$

$$= 16 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \int_{\frac{r'}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t_0 - t_1)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} \lambda^2 \, d\lambda + 4 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \int_{\frac{r'}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t_0 - t_1)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} \, d\lambda \quad .$$

Quand r' tend vers zéro, ceci devient, moyennant une intégration par parties, égal à

$$12\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda = 6\sqrt{\frac{\mu\pi}{\rho}}\ .$$

En écrivant alors dans (253)

$$[u(x_0, y_0, z_0, t) - u(x_0, y_0, z_0, t_0)] + u(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

à la place de u_0, on aperçoit élémentairement que la limite cherchée est

$$-4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\; u(x_0, y_0, z_0, t_0)\ ,$$

la contribution due au crochet $[u(x_0, y_0, z_0, t)] - u(x_0, y_0, z_0, t_0)]$ étant aussi petits que l'on veut pour t_1 assez voisin de t_0.

Tous ces résultats transportés dans (248) nous permettent maintenant d'écrire :

(254)
$$4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\; u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \lim_{r'=0}\left\{\begin{aligned} &\rho\iiint_{\omega(r',0)}(uu'_1+vv'_1+ww'_1)\,d\omega \\ &\rho\int_0^{t_0}dt\iint_{S(t)}(uu'_1+vv'_1+ww'_1)\,V_n\,d\sigma \\ -&\int_0^{t_0}dt\iint_{S(t)}\left[u'_1\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\dots\right]d\sigma \\ +&\int_0^{t_0}dt\iint_{S(t)}\left[u\left(\mu\frac{du'_1}{dn}-p'_1\cos nx\right)+\dots\right]d\sigma \end{aligned}\right.$$

On n'a, naturellement, pas le droit de faire sans précautions $r' = 0$ dans le second nombre. Mais on verra assez aisément que, en désignant par u_1, v_1, w_1, ce que deviennent les fonctions u_1', v_1', w_1', quand on y fait tendre r' vers zéro, les trois premiers termes du second nombre tendent vers

$$\rho\iiint_{\omega(0)}(uu_1+vv_1+ww_1)\,d\omega$$

$$-\rho\int_0^{t_0}dt\iint_{S(t)}(uu_1+vv_1+ww_1)\,V_n\,d\sigma$$

$$-\int_0^{t_0}dt\iint_{S(t)}\left[u_1\left(\mu\frac{du}{dn}-p\cos nx\right)+\dots\right]d\sigma$$

Quant au quatrième terme, il se décompose en deux parties, dont la première, indépendante de p'_1 devient

$$\mu \int_0^{t_0} dt \iint_{s(t)} \left(u \frac{du_1}{dn} + v \frac{dv_1}{dn} + w \frac{dw_1}{dn} \right) d\sigma \ ,$$

et dont la seconde peut s'écrire, en vertu de la quatrième formule (240) :

(255) $$- \lim \int_0^{t_0} dt \iint_{s(t)} p'_1 \,(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)\, d\sigma$$

$$= - \lim \frac{\rho\, r^2}{2} \int_0^{t_0} \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt \times$$

$$\iiint_{s(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) \frac{x - x_0}{r^3}\, d\sigma$$

L'expression à étudier est de la forme

$$r' \int_0^{t_0} h\,(t) \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt \quad .$$

Nous allons démontrer qu'on a :

(256) $$\lim_{r'=0} r' \int_0^{t_0} h\,(t) \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt = 2 \sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}}\, h\,(t_0)$$

dès que $h\,(t)$ est une fonction continue. En effet, tout d'abord la quantité

$$\frac{r'\,\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}$$

tend uniformément vers zéro avec r' dans tout l'intervalle $0, t_1$, c'est-à-dire si

$$0 < t \leqq t_1 < t_0 \quad .$$

Il s'ensuit immédiatement

$$\lim r' \int_0^{t_0} h\,(t) \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt = \lim r' \int_{t_1}^{t_0} h\,(t) \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt$$

$$= \lim \left\{ r' h\,(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt + r' \int_{t_1}^{t_0} [h\,(t) - h\,(t_0)] \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt \right\}$$

Et comme il vient par un changement de variable déjà utilisé,

$$\lim r' \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{E}\,(r', t)}{t_0 - t}\, dt = \lim 4 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \int_{\frac{r'}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t_0 - t_1)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = 2 \sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}}$$

on en conclut de suite, par un raisonnement élémentaire déjà indiqué, l'égalité (258) demandée.

La limite de l'expression (255) sera par conséquent

$$-\sqrt{\mu\rho\pi}\iint_{s(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)\frac{x-x_0}{r^3}\,d\sigma$$

En tenant compte de ces résultats dans l'équation (254), celle-ci devient une équation qui fait connaître $u\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$ en fonction des valeurs initiales de u, v, w, à l'instant $t = 0$, dans le volume $\omega\,(0)$, et des valeurs de

$$u,\ v,\ w,\ p,\ \frac{du}{dn},\ \frac{dv}{dn},\ \frac{dw}{dn},$$

sur la surface $S\,(t)$ à tout instant compris entre 0 et t_0. Les calculs qui conduisent à cette belle formule

$$(257)\quad \left\{\begin{aligned}
4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\,u\,(x_0, y_0, z_0, t_0) &= \rho\iiint_{\omega(0)}(uu_1 + vv_1 + ww_1)\,d\omega \\
&\quad -\rho\int_0^{t_0}dt\iint_{s(t)}(uu_1 + vv_1 + ww_1)\,V_n\,d\sigma \\
&\quad -\int_0^{t_0}dt\iint_{s(t)}\left[u_1\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx\right) + \ldots\right]d\sigma \\
&\quad +\mu\int_0^{t_0}dt\iint_{s(t)}\left(u\frac{du_1}{dn} + v\frac{dv_1}{dn} + w\frac{dw_1}{dn}\right)d\sigma \\
&\quad -\sqrt{\mu\rho\pi}\iint_{s(t_0)}(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)\frac{x-x_0}{r^3}\,d\sigma
\end{aligned}\right.$$

sont dus à M. C.-W. Oseen.

Il est clair qu'en utilisant, au lieu du groupe de fonctions (u'_1, v'_1, w'_1, p'_1) les deux groupes (u'_2, v'_2, w'_2, p'_2) ou (u'_3, v'_3, w'_3, p'_3) respectivement, on obtiendrait, par de simples permutations, deux formules résolues par rapport à $v\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$ ou $w\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Enfin le quatrième groupe (u'_4, v'_4, w'_4, p'_4) (équation 241), traité d'une manière analogue, fournira une équation en $p\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

On trouvera tout le détail des calculs, que nous ne pouvons reproduire, dans le Mémoire de l'éminent mathématicien d'Upsale (*Acta Mathematica*, t. 34, 1910, p. 205 et suivantes).

En résumé, et après un changement de notations, ayant pour but

de nous débarrasser de l'indice zéro, nous nous trouvons en possession des quatre équations intégrales qui figurent dans le tableau ci-dessous, où nous rappelons les définitions principales :

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

(258)
$$E(\alpha, \tau, t) = \frac{e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}, \quad P = \frac{1}{r}\int_0^r E(\alpha, \tau, t)\, d\alpha$$

$$u_1 = -\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad w_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi\, \partial \zeta}$$

$$u_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi\, \partial \eta}, \quad v_2 = -\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \quad w_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta\, d\zeta}$$

$$u_3 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi\, \partial \zeta}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 P}{\partial \eta\, d\zeta}, \quad w_3 = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}$$

(259)
$$4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\, u(x, y, z, t) = \rho \iiint_{\omega(t_0)} [u(\xi, \eta, \zeta, t_0), u_1$$
$$+ v v_1 + w w_1]_{\tau = t_0}\, d\omega - \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S(\tau)} [u_1 (\mu \frac{du}{dn}$$
$$- p \cos nx + \rho u V_n) + \ldots\ldots]\, d\sigma$$
$$+ \mu \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S(\tau)} \left(u \frac{du_1}{dn} + v \frac{dv_1}{dn} + w \frac{dw_1}{dn}\right) d\sigma$$
$$- \sqrt{\mu\rho\pi} \iint_{S(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)\, \frac{\xi - x}{r^3}\, d\sigma$$
$$4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\, v(x, y, z, t) = \ldots\ldots$$
$$4\pi\sqrt{\mu\rho\pi}\, w(x, y, z, t) = \ldots\ldots$$
$$4\pi p(x, y, z, t) =$$
$$- \iint_{S(t)} [(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \rho u V_n)\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots\ldots]\, d\sigma$$
$$+ \mu \iint_{S(t)} [u \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right) + \ldots\ldots]\, d\sigma$$
$$+ \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(t)} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)\, \frac{d\sigma}{r}$$

Dans ces formules (259), les intégrales de surface qui figurent,

sont calculées avec les coordonnées $(\xi\eta\zeta)$ à un instant τ ou à l'instant t ; n désigne toujours la normale vers l'*intérieur* du volume. Comme on l'a déjà remarqué (équation 238) la fonction P qui intervient ici satisfait à l'équation

$$(260) \qquad \rho \frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu \underset{\xi\eta\zeta}{\Delta} P = 0$$

Démonstration directe de la formule relative à p (x, y, z, t).

Nous n'avons pas développé les calculs relatifs à l'équation concernant $p(v, x, z, t)$, parce que la quatrième formule (259), que l'on peut obtenir par le passage à la limite au moyen des fonctions (u'_4, v'_4, w'_4, p'_4), peut s'obtenir directement, par un procédé très simple, dû à M. U. Crudeli (*Atti. dei Lincei. XXI*, 1912, 2[e] sem. pp. 231, 271, 332). C'est ce que nous allons expliquer en quelques mots.

Appliquons aux fonctions $u(x, y, z, t)$ et $\frac{1}{r}$ la formule (245), pour le volume $\omega(r')$ compris entre la surface $S(t)$ et la petite sphère Σ de centre x, y, z. Nous obtenons ainsi, puisque $\Delta \frac{1}{r} = 0$,

$$\iiint_{\omega(r')} \frac{1}{r} \Delta u \, d\omega + \iint_{S(t)} \frac{1}{r} \frac{du}{dn_i} d\sigma - \iint_{S(t)} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma$$

$$+ \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{du}{dn_i} d\sigma - \iint_{\Sigma} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\sigma = 0 \, ,$$

n_i étant toujours la normale intérieure à $\omega(r')$. Si nous faisons tendre r' vers zéro, il est bien connu (et du reste presque évident) que les deux derniers termes (relatifs à Σ) tendent respectivement vers zéro et $4\pi u(x, y, z, t)$. Nous pouvons donc écrire, en étendant cette fois l'intégrale triple à tout le volume $\omega(t)$, et en écrivant n à la place de n_i ,

$$4\pi u(x, y, z, t) = -\iiint_{\omega(t)} \frac{1}{r} \Delta u \, d\omega$$

$$-\iint_{S(t)} \frac{1}{r} \frac{du}{dn} d\sigma + \iint_{S(t)} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

Mais en vertu de la première des équations de l'hydrodynamique (éq. 227), nous pouvons remplacer Δu par

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

de sorte qu'il vient

$$(261)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi\mu\, u(x, y, z, t) &= -\rho\iiint_{\omega(t)}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\omega \\ &-\iiint_{\omega(t)}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi}\,d\omega-\mu\iint_{s(t)}\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\,d\sigma \\ &+\mu\iint_{s(t)} u\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,, \end{aligned}\right.$$

La même formule (244) permet maintenant d'écrire :

$$\iiint_{\omega(t)}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi}\,d\omega=-\iiint_{\omega(t)} p\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \xi}\,d\omega$$
$$-\iint_{s(t)}\frac{p}{r}\cos nx\,d\sigma\quad .$$

On a ensuite évidemment

$$\iiint_{\omega(t)} p\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \xi}\,d\omega=-\frac{\partial}{\partial x}\iiint_{\omega(t)}\frac{p}{r}\,d\omega$$

Enfin la formule (246) montre qu'on a

$$\iiint_{\omega(t)}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\omega=\iiint_{\omega(t)}\frac{\partial\frac{u}{r}}{\partial t}\,d\omega$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\omega(t)}\frac{u}{r}\,d\omega+\iint_{s(t)}\frac{u}{r}V_n\,d\sigma\quad ,$$

V_n ayant toujours la même signification que dans les paragraphes antérieurs. Il est vrai qu'ici la présence du point (x, y, z), où r s'annule, dans le domaine ω (t) d'intégration, introduit une petite difficulté apparente, mais celle-ci disparait d'elle-même si l'on observe que les intégrales de volumes utilisées restent uniformément convergentes dans le voisinage de ce point.

Transportant ces divers résultats dans l'équation (261), celle-ci devient

$$4\pi\mu\, u(x, y, z, t) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega(t)} \frac{u}{r}\, d\omega - \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{\omega(t)} \frac{p}{r}\, d\omega$$

$$-\rho \iint_{s(t)} \frac{u}{r} V_n\, d\sigma + \iint_{s(t)} \frac{p}{r} \cos nx\, d\sigma$$

$$-\mu \iint_{s(t)} \frac{1}{r} \frac{du}{dn}\, d\sigma + \mu \iint_{s(t)} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma$$

Nous pouvons évidemment écrire trois formules analogues à celle-ci, donnant respectivement $u(x\, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ et $w(x, y, z, t)$. Ces formules supposées écrites, décrivons-les par rapport à x, y ou z, et ajoutons les résultats. Le premier nombre donne zéro, à cause de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ,$$

et il viendra — en observant qu'une dérivation d'une intégrale des types employés, par rapport à x, revient au signe près à une dérivation de $\frac{1}{r}$ par rapport à ξ sous le signe intégral, — la relation ci-dessous :

$$0 = +\rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega(t)} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\omega$$

(262)
$$\left\{ \begin{aligned} & \Delta \iiint_{\omega(t)} \frac{p}{r}\, d\omega + \rho \iint_{s(t)} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) V_n\, d\sigma - \iint_{s(t)} p \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \cos nx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \cos ny \right. \\ & \left. + \frac{\partial \frac{1}{r}}{d\zeta} \cos nz \right) d\sigma + \mu \iint_{s(t)} \left(\frac{du}{dn} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{dv}{dn} \frac{\partial \frac{1}{r}}{d\eta} \right. \\ & \left. - \frac{dw}{dn} \frac{\partial \frac{1}{r}}{d\zeta} \right) d\sigma - \mu \iint_{s(t)} \left[u \frac{\partial}{d\xi} \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) + v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) \right. \\ & \left. + w \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) \right] d\sigma \end{aligned} \right.$$

Il n'y a plus qu'à remarquer maintenant, que, d'après le théorème de Poisson (f. 203) on a

$$\Delta \iiint_{\omega(t)} \frac{p}{r}\, d\omega = -4\pi\, p(x, y, z, t) \quad ,$$

pour faire apparaître un terme en $p(x, y, z, t)$. Enfin, toujours à cause de l'équation de continuité, on a

$$\iiint_{\omega(t)} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\omega$$

$$= \iiint_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \frac{u}{r}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \frac{v}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial \frac{w}{r}}{\partial \zeta} \right) d\omega$$

ou encore, à cause de (243) :

$$\iiint_{\omega(t)} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\omega$$

$$= - \iint_{S(t)} \frac{1}{r} (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)\, d\sigma \quad .$$

Grâce à ces deux dernières transformations, la formule (262) devient ainsi, précisément, la quatrième formule (259) à démontrer.

On voit donc avec netteté la provenance et l'établissement des quatre formules de M. Oseen.

On peut ensuite démontrer, — et sur ce point nous renverrons encore au Mémoire de M. Oseen, que si $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta, t_0)$, $w(\xi, \eta, \zeta, t_0)$ sont des fonctions données, continues, dans $\omega(t_0)$ et si

$$u, v, w, p, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn},$$

sont également supposés continus sur la surface $S(\tau)$ pour tout instant τ à partir de t_0 jusqu'à t (1), les fonctions $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, définies par les formules (259) satisfont constamment aux équations de l'hydrodynamique ; de plus on a

$$\lim u(x, y, z, t) = u(\xi, \eta, \zeta, t_0),$$

et des équations analogues, si r et $t - t_0$ tendent vers zéro, — pourvu que les quantités $u(\xi, \eta, \zeta, t_0)$, $v(\ldots)$, $w(\ldots)$, admettent des dérivées continues (exception faite pour certaines surfaces de discontinuité éventuelles), satisfaisant bien entendu à l'équation de continuité.

(1) Observons que ces données sont évidemment surabondantes et ne peuvent par suite être choisies d'une manière complètement arbitraire.

CHAPITRE XIV

LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN LIQUIDE DE VISCOSITÉ TRÈS FAIBLE

Nous allons, dans le présent Chapitre, étudier le problème suivant :

On suppose que dans un liquide indéfini primitivement au repos, soit placé un corps solide, dont la surface sera désignée par $S(t)$. A l'instant initial, ce corps solide est aussi au repos, on le met en mouvement, d'un mouvement de translation connu, dont la vitesse sera parallèle à l'axe ox, positive et égale à $U(t)$. Le liquide est supposé visqueux, il *colle*, par suite, aux parois du corps baigné. Pendant tout le mouvement, les équations d'Oseen (259) sont applicables. Nous allons chercher ce que deviennent ces formules quand le coefficient de viscosité tend vers zéro, et nous tâcherons d'en déduire les caractéristiques du mouvement limite correspondant à $\mu = 0$, ou, tout au moins, *d'un* mouvement limite compatible avec les équations utilisées.

Nous désignerons par $\omega(t)$ l'espace occupé par le fluide à l'instant t, c'est-à-dire l'espace indéfini extérieur à la surface $S(t)$; par $G(t_0)$ et $G(t)$ les volumes intérieurs respectivement à $S(t_0)$ et à $S(t)$; par $\Omega(t)$ l'espace compris dans le cylindre parallèle à ox, circonscrit à la fois à $S(t_0)$ et à $S(t)$, et compris de plus entre ces deux positions du solide [1].

Nous admettrons que toute parallèle à ox à l'intérieur du cylindre ci-dessus rencontre la surface $S(t)$ en un certain nombre fini de points, et nous simplifierons l'exposé en supposant qu'il n'y ait que deux points de rencontre au plus ; l'hypothèse d'un plus grand

(1) Bien entendu, nous supposons les surfaces $S(t_0)$ et $S(t)$ assez éloignées l'une de l'autre pour n'avoir aucun point commun. Sinon, les lignes suivantes demanderaient de légères modifications, du reste quasi évidentes.

nombre de points possibles ne ferait qu'allonger les écritures sans rien changer d'essentiel. Enfin, nous supposerons que la surface $S(t)$ n'ait que des points simples, sauf peut-être les points de contact avec le cylindre circonscrit parallèle à ox.

Dans ces conditions, nous appellerons $S_1(t)$ et $S_2(t)$ les portions de la surface $S(t)$ qui regardent respectivement du côté des x positifs (sens du mouvement) et du côté opposé.

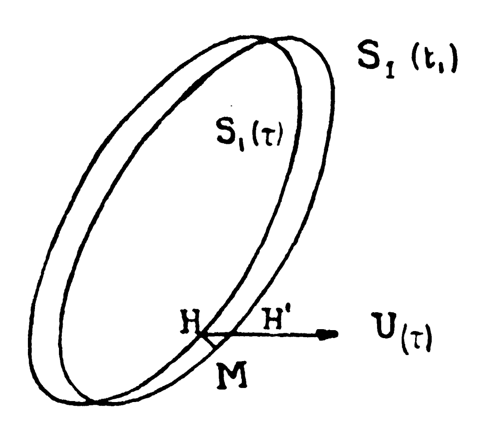
Des hypothèses faites, il suit que, si M désigne un point de l'espace, si ce point n'est pas dans la région $G(t_0) + \Omega(t) + G(t)$, il ne sera jamais atteint par la surface $S(t)$ du corps pendant son mouvement, depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t. Si M est dans $G(t_0)$, il sera atteint *une fois*, par le front arrière $S_2(t)$ de S ; si M est dans $\Omega(t)$, il sera atteint *deux fois*, une fois par le front avant $S_1(t)$, et une fois par la face arrière $S_2(t)$, à un moment ultérieur. Enfin, si M est dans $G(t)$ il sera atteint une seule fois, par la face antérieure $S_1(t)$.

Nous conviendrons d'appeler, dans ce qui va suivre, t_1 et t_2 les instants éventuels (existant tous les deux, ou bien un seul, ou bien aucun), où la face $S_1(t)$ ou la face $S_2(t)$ viennent à passer au point M. Il est clair qu'on a :

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t,$$

Représentons la surface $S(\tau)$ à un instant τ voisin de t_1 ; le point M sera donc très voisin de $S_1(\tau)$. Soit δ la plus courte distance MH du point M à la surface $S_1(\tau)$; le petit triangle rectangle MHH' de la *figure*, où HH' est la parallèle à ox menée par H, donne :

$$\delta = |HH' \cos nx| = |U(t_1 - \tau) \cos nx|,$$



la direction MH étant celle de la normale à $S_1(\tau)$, U étant $U(\tau)$, ce qui ne diffère pas sensiblement de $U(t_1)$. La quantité $U \cos nx$ représente donc la composante, normale à $S_1(\tau)$, de la vitesse $U(\tau)$.

Nous poserons :

(263) $$U_n^{(1)}(\tau) = | U(\tau) \cos n_1 x | ,$$

et l'on aura approximativement :

(264) $$\delta = | t_1 - \tau | U_n^{(1)}(\tau) ,$$

ou, sensiblement :

$$\delta = | t_1 - \tau | U_n^{(1)}(t_1) .$$

En opérant d'une manière analogue avec la face arrière, nous serons conduit à désigner par :

(265) $$U_n^{(2)}(\tau) = | U(\tau) \cos n_2 x | ,$$

la valeur absolue de la vitesse de translation de $S_2(t)$, projetée sur la normale à S_2.

Tout ceci posé, revenons à nos équations intégrales(1) et examinons d'abord la première dont le premier membre est :

$$4\pi \sqrt{\mu \rho \pi}\, u(x, y, z, t) .$$

A cause de l'hypothèse du repos initial pour $t = t_0$, la première intégrale qui figure au second membre est nulle. Afin de constater quels sont les termes importants qui subsistent au second membre, voyons quel sera l'ordre de grandeur des fonctions u_1, v_1, w_1, ... et, tout d'abord, de la fonction P qui sert à former celles-ci.

On a (258) :

$$P = \frac{1}{r} \int_0^r e^{-\frac{\rho \alpha^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{d\alpha}{\sqrt{t-\tau}} .$$

Posons :

$$\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\mu(t-\tau)}} = \lambda ,$$

---

(1) Dans le Chapitre XIII, le volume fluide que nous avions considéré avait été indiqué comme *intérieur* à la surface $S(t)$. On passe aisément au cas actuel, où il s'agit du volume indéfini extérieur à $S(t)$, en envisageant le volume compris entre $S(t)$ et une sphère de centre O et de très grand rayon. En faisant croître indéfiniment ce rayon, on parvient aux résultats utilisés ici, en admettant que le mouvement soit régulièrement nul aux grandes distances.

il vient :

$$P = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\int_0^{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t-\tau)}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda .$$

Pour μ très petit, la limite supérieure de l'intégrale est très grande, de sorte que P diffère très peu de l'expression :

$$\frac{2}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}}\,\frac{1}{r} .$$

En dérivant l'expression de P ci-dessus, par rapport à une variable, ξ par exemple, on obtiendra de suite :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \xi}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\int_0^{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t-\tau)}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$$

$$+\frac{2}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu\,(t-\tau)}}\,\frac{\partial r}{\partial \xi} ,$$

c'est-à-dire approximativement :

$$\sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{1}{r}\,\frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\,\frac{\partial r}{\partial \xi} .$$

On voit que la fonction P, pour μ petit, sera comparable à $\sqrt{\mu}$, et qu'il en sera de même de ses dérivées et, par suite, de toutes les fonctions u_1, v_1, w_1, ..., w_3, formées à l'aide de P.

De ce qui précède, on conclut que le second terme de la première formule (259) envisagée sera de l'orde de $\sqrt{\mu}$, ainsi qu'il en est pour le premier membre ; la formule, après division par $\sqrt{\mu}$, laissera donc, à la limite, subsister ce second terme.

Au contraire, le terme suivant:

$$\mu\int_{t_0}^{t} dt\iint_{S(\tau)}\left(u\,\frac{d u_1}{d n} + \dots\right) d\tau ,$$

sera d'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport à μ. Après division par $\sqrt{\mu}$, sa contribution limite sera nulle.

Enfin, le dernier terme :

$$-\sqrt{\mu\,\rho\,\pi}\int_{S(t)}(u\cos nx + \dots)\,\frac{\xi - x}{r^3}\, d\tau ,$$

subsistera après division par $4\pi\sqrt{\mu\,\rho\,\pi}$; et après cette division il sera de la forme $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, en posant :

(266')
$$\psi_1 = \frac{U(t)}{4\pi} \iint_{S(t)} \frac{\cos nx \, d\sigma}{r},$$

au moins pour $\mu = 0$, car, sur la paroi $S(t)$, la vitesse (u, v, w) doit coïncider avec celle de la paroi $(u = U, v = 0, w = 0)$.

En définitive, nous devons donc nous attendre à ce que les formules à adopter soient de la forme suivante pour u, v, w :

(267)
$$\left\{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \int_{t_0}^{t} dt \iint_{S(\tau)} (u_1 A + v_1 B + w_1 C) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= \int_{t_0}^{t} dt \iint_{S(\tau)} (u_2 A + v_2 B + w_2 C) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= \int_{t_0}^{t} dt \iint_{S(\tau)} (u_3 A + v_3 B + w_3 C) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

et l'examen de la formule (259) qui concerne p conduit, de même, à l'expression (avec les mêmes coefficients A, B, C) :

(268)
$$\left\{\begin{aligned} &p(x, y, z, t) = \\ &\sqrt{\frac{}{\mu \rho \pi}} \iint_{S(t)} \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

La fonction ψ définie par (266) satisfait évidemment à l'équation de Laplace :

(269)
$$\Delta \psi(x, y, z, t) = 0.$$

Dans les quatre formules (267) (268) les trois fonctions A, B, C, sont des fonctions, pour l'instant *inconnues*, des arguments (ξ, η, ζ) du point courant sur la surface $S(\tau)$. Il n'y a aucunement lieu d'espérer connaître ces fonctions en utilisant les valeurs limites des parenthèses, telles que $\frac{du}{dn} - p \cos nu + \rho u V_n$, qui figurent dans dans les formules (259), car ce procédé conduirait sûrement à un résultat inexact. Les exemples simples, développés dans les Chapitres X et XI prouvent, en effet, que u, v, w, tout au moins, peuvent cesser d'être continus au voisinage de la paroi quand on fait tendre μ vers 0; à la limite, la condition d'adhérence peut cesser d'être vérifiée; rien ne nous permet de prévoir quelles seraient les valeurs limites des parenthèses en question. La même observation est valable quant à la fonction ψ.

Force nous est, au contraire, de considérer jusqu'à nouvel ordre A, B, C, ψ, comme des fonctions inconnues, que nous tenterons de déterminer dans ce qui suit.

Mais nous pouvons, dès maintenant prévoir que, les fonctions u_i v_i w_i était, pour μ petit, de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, les fonctions

cherchées A , B , C , seront de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ et que ce seront par conséquent les quantités :

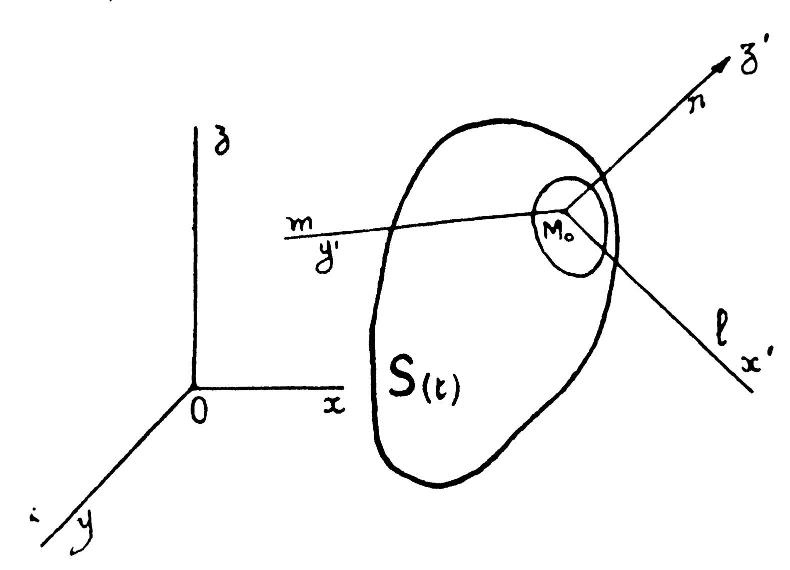
$$a = A\sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}} \quad , \quad b = B\sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}} \quad , \quad c = C\sqrt{\frac{\mu\,\pi}{\rho}} \quad ,$$

— où l'adjonction du facteur $\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}$ n'a pour but que de simplifier l'écriture ultérieure — qui seront appelées à jouer un rôle.

Nous écrirons donc nos formules comme il suit :

$$(270)\begin{cases} u\,(x, y, z, t) = \\ \quad \sqrt{\frac{\rho}{\mu\,\pi}} \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S(\tau)} (u_1\, a + v_1\, b + w_1\, c)\, d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v\,(x, y, z, t) = \quad \ldots \\ w\,(x, y, z, t) = \quad \ldots \\ \qquad p\,(x, y, z, t) = \\ \quad \rho \iint_{S(t)} \left(a\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma - \rho\,\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad . \end{cases}$$

Et le problème consiste à déterminer les fonctions inconnues a , b , c et ψ .



A cet effet, en supposant d'abord μ différent de zéro, nous écrirons les conditions à la paroi du corps solide, à savoir que, à chaque instant t la vitesse (u , v , w) doit coïncider avec la vitesse ($U(t)$, 0 , 0) de translation de la paroi. En écrivant ce fait sur les formules précédentes (270), nous ne négligeons que des termes destinés à devenir nuls à la limite.

La simple inspection des formules montre qu'il nous faut d'abord étudier les intégrales de surface, telles que :

(271) $$I = \iint_{S(\tau)} (u_1 a + v_1 b + w_1 c)\, d\sigma \ .$$

Tant que le point (xyz) n'est pas voisin d'un point $(\xi\eta\zeta)$ de $S(\tau)$ il ne se présente aucune difficulté.

Examinons le cas où le point (xyz) est au voisinage d'un point $M_0(x_0 y_0 z_0)$ simple de $S(\tau)$. Découpons sur $S(\tau)$ une petite portion $s(\tau)$ de surface avoisinant ce point.

C'est de cette portion $s(\tau)$ que proviendra toute difficulté éventuelle. Nous allons étudier à part ce qui concerne $s(\tau)$, et par suite l'intégrale :

(272) $$J = \iint_{s(\tau)} (a u_1 + b v_1 + c w_1)\, d\sigma \ ,$$

qui, à cause de la définition (258) de u_1, v_1, w_1, vaut :

$$J = -\iint_{s(\tau)} a \Delta P\, d\sigma + \iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial^2 P}{d \xi^2} + b \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta} \right) d\sigma \ ,$$

c'est-à-dire :

(273) $$J = J_1 + J_2 \ ,$$

en posant :

(274) $$\left\{ \begin{aligned} J_1 &= -\iint_{s(\tau)} a \, . \, \Delta P \, . \, d\sigma \ ; \\ J_2 &= \iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta} \right) d\sigma \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial P}{d \xi} + b \frac{\partial P}{\partial \eta} + c \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\sigma \ . \end{aligned} \right.$$

A cause de ce que nous savons de l'expression asymptotique de P, nous prévoyons que l'intégrale :

$$\iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial P}{\partial \xi} + b \frac{\partial P}{\partial \eta} + c \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\sigma \ ,$$

va se comporter à peu près comme la somme de trois dérivées de potentiels de simple couche ; nous avons vu que la direction n de la normale à la surface jouait pour ces potentiels et leurs dérivées un rôle exceptionnellement important ; nous sommes donc conduit à faire

un changement de coordonnées, en prenant comme nouveaux axes ($M_0\, x'\, y'\, z'$) deux tangentes rectangulaires $M_0 l$, $M_0 m$ en M_0 à $S(\tau)$, et la normale $M_0 n$ vers l'intérieur du volume $\omega(\tau)$. On a des formules de transformation de la forme :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 (x - x_0) + \beta_1 (y - y_0) + \gamma_1 (z - z_0)\,, \\ y' &= \alpha_2 (x - x_0) + \ldots \\ z' &= \alpha_3 (x - x_0) + \ldots \end{aligned}$$

et des formules identiques avec les lettres $(\xi\ \eta\ \zeta)$ et $(\xi'\ \eta'\ \zeta')$ pour un point de $s(\tau)$.

On en conclut :

$$a \frac{\partial P}{\partial \xi} + b \frac{\partial P}{\partial \eta} + c \frac{\partial P}{\partial \zeta} = a' \frac{\partial P}{\partial \xi'} + b' \frac{\partial P}{\partial \eta'} + c' \frac{\partial P}{\partial \zeta'}\,,$$

en posant :

$$\begin{aligned} a' &= a\,\alpha_1 + b\,\beta_1 + c\,\gamma_1 \\ b' &= a\,\alpha_2 + b\,\beta_2 + c\,\gamma_2 \\ c' &= a\,\alpha_3 + b\,\beta_3 + c\,\gamma_3 \end{aligned}$$

Nous constatons en passant, que c' n'est autre que la *composante normale*, suivant $M_0 n$, du vecteur (a, b, c).

Quant à $\Delta_{\xi\eta\zeta} P$, on sait, d'après l'invariance du symbole de Laplace, qu'il sera remplacé par $\Delta_{\xi'\eta'\zeta'} P$, calculé de la même manière à l'aide des coordonnées $\xi'\ \eta'\ \zeta'$. Au reste, les formules de transformation permettant de le vérifier sans difficulté.

On voit donc la nouvelle expression de J_1. Quant à J_2, nous aurons évidemment :

$$J_2 = -\frac{\partial}{\partial x} \iint_{s(\tau)} \left(a' \frac{\partial P}{\partial \xi'} + b' \frac{\partial P}{\partial \eta'} + c' \frac{\partial P}{\partial \zeta'}\right) d\sigma$$
$$- \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x'} \iint_{s(\tau)} i\, d\,. - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y'} \iint_{s(\tau)} i\, d\,. - \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z'} \iint_{s(\tau)} i\, d\,.$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} J_2 = \iint_{s(\tau)} \Bigg[& \alpha_1 \left(a' \frac{\partial^2 P}{\partial \xi'^2} + b' \frac{\partial^2 P}{\partial \xi' \partial \eta'} + c' \frac{\partial^2 P}{\partial \xi' \partial \zeta'}\right) \\ & + \alpha_2 \left(a' \frac{\partial^2 P}{\partial \xi' \partial \eta'} + b' \frac{\partial^2 P}{\partial \eta'^2} + c' \frac{\partial^2 P}{\partial \eta' \partial \zeta'}\right) \\ & + \alpha_3 \left(a' \frac{\partial^2 P}{\partial \xi' \partial \zeta'} + b' \frac{\partial^2 P}{\partial \eta' \partial \zeta'} + c' \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta'^2}\right) \Bigg] d\sigma\,. \end{aligned}$$

Comme on pouvait le prévoir, le terme le plus important dans cet ensemble, est le dernier terme, $\alpha_3 c' \frac{\partial^2 P}{\partial^2 \zeta'}$, que nous écrirons, d'après la remarque rappelée plus haut :

$$\alpha_3 c' \underset{\xi\eta\zeta}{\Delta} P - \alpha_3 c' \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta'^2} \right) .$$

Il vient alors :

(275) $$J_2 = \iint_{s(\tau)} \alpha_3 c' \Delta P \, d\sigma + J_3$$

en posant :

(276) $$\left\{ \begin{aligned} J_3 = \iint_{s(\tau)} \Big[& (\alpha_1 a' - \alpha_3 c') \frac{\partial^2 P}{\partial \xi'^2} + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 a') \frac{\partial^2 P}{\partial \eta' \, \partial \eta'} \\ & + \ldots + (\alpha_2 c' + \alpha_3 b') \frac{\partial^2 P}{\partial \eta' \, \partial \zeta'} \Big] d\sigma . \end{aligned} \right.$$

A cause de (273), (274), (275), on aura, en remarquant que $\alpha_3 = \cos nx$,

(277) $$J = - \iint_{s(\tau)} (a - c' \cos nx) \Delta P \, d\sigma + J_3 = J' + J_3 .$$

L'intégrale J' se transforme immédiatement, en utilisant l'équation (236), qui donne :

$$\Delta P = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \right|$$

c'est-à-dire :

$$\Delta P = - \frac{\rho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} .$$

On a donc :

$$J' = \iint_{s(\tau)} (a - c' \cos nx) \frac{\rho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} \, d\sigma .$$

Dès que le point $M(xyz)$ sera à une distance notable du point $(\xi\eta\zeta)$, l'intégrale J' tendra vers zéro en même temps que μ. Supposons que M soit sur la normale en M_0 à $S(\tau)$, à une distance δ de cette dernière ; Q étant un point $(\xi\eta\zeta)$ de $s(\tau)$, on a sensiblement :

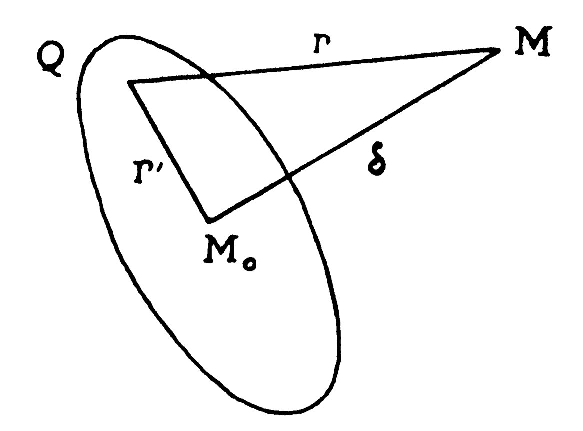
$$r^2 = MQ^2 = \delta^2 + r'^2$$

r' désignant la distance $M_0 Q$. Assimilons la petite surface $s(\tau)$ à un petit disque circulaire ayant le point M_0 pour centre, et ε pour rayon. On voit alors que la portion utile de J' pourra s'écrire approximativement, dans ce cas :

$$J'' = (a - c' \cos nx)_{x_0 y_0 z_0}\, e^{-\frac{\rho\delta^2}{4\mu(t-\tau)}} \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{\varepsilon} \frac{\rho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\rho r'^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, 2\pi r'\, dr' ,$$

ce qui donne de suite :

$$(278) \qquad J'' = 2\pi (a - c' \cos nx)_{x_0 y_0 z_0} \frac{e^{-\frac{\rho\delta^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}$$



Telle est la partie principale de J' ; cette partie principale devient du reste négligeable dès que δ prend une valeur notable.

Reste l'expression J_3 (f. 276). En utilisant des intégrations par par parties, puis remplaçant P ou ses dérivées premières asymptotiques calculées un peu plus haut, on voit aisément que la présence du facteur $\sqrt{\mu}$, ou de l'exponentielle $e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}$, rend les résultats négligeables par rapport aux précédents.

En définitive, l'expression asymptotique de J sera :

$$(279) \qquad J = 2\pi (a - c' \cos nx)_{x_0 y_0 z_0} \frac{e^{-\frac{\rho\delta^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} .$$

Pour avoir l'expression approchée de I , il faudra adjoindre à J la valeur limite de l'intégrale :

$$\iint_{S(\tau)-s(\tau)} (a u_1 + b v_1 + c w_1)\, d\sigma ,$$

étendue à $S(\tau)$ dont on a retranché la portion $s(\tau)$, Comme sur la portion restante, r ne devient pas infiniment petit, et comme P

devient approximativement $\sqrt{\frac{\mu \pi}{\rho}}\,\frac{1}{r}$, on constate que la portion (éq. 273) :

$$\iint_{S-s}\left(a\,\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}+b\,\frac{\partial P}{\partial \xi\,\partial \eta}+c\,\frac{\partial P}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right)d\sigma$$

devient :

$$-\sqrt{\frac{\mu \pi}{c}}\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S-s}\left(a\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+b\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+c\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\sigma\,,$$

que nous noterons, à la limite, par l'écriture :

$$(280)\qquad -\sqrt{\frac{\mu \pi}{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S(\tau)}\left(a\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+b\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+c\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\sigma\,.$$

Quant à la partie restante :

$$-\iint_{S-s} a\,\Delta P\,d\sigma\,,$$

le calcul même qui a conduit à l'expression de J'' prouve, par la présence du facteur exponentiel $e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t-\tau)}}$, que cette quantité tend vers zéro avec μ.

On obtient donc l'expression appprochée de I, par l'addition des expressions (279) et (280).

Il s'agit maintenant d'appliquer ce résultat au calcul de $u(xyzt)$ quand μ est très petit. Les choses se passent différemment suivant la position du point $M(xyz)$ dans l'espace.

1° Point en dehors du volume $G(t_0)+\Omega(t)+G(t)$. — Alors, dans l'intervalle $t_0 \leqq \tau \leqq t$, la surface $S(\tau)$ ne passe jamais au point M, il n'y a pas lieu de s'occuper de l'intégrale J, et il reste, en utilisant simplement l'expression (280) :

$$(281)\quad \begin{cases} u(x,y,z,t) = \\ -\int_{t_0}^{t} d\tau\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S(\tau)}\left(a\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+b\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+c\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\sigma+\frac{\partial \psi}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial \varphi_1(xyzt)}{\partial x}$$

en posant :

$$(282) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) &= \psi(x, y, z, t) \\ &- \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma . \end{aligned} \right.$$

On a ainsi le groupe de formules :

$$(283) \qquad u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad ,$$

valables dans toute la région de l'espace où le corps solide n'a pas encore pénétré, ou ne peut pénétrer. $\frac{1}{r}$ étant une fonction harmonique, il est clair qu'on a

$$(284) \qquad \Delta \varphi_1 = 0 .$$

2° *Point à l'intérieur de* $\Omega(t)$. — Dans ce cas, la surface $S_1(\tau)$ vient passer en M, une fois par la face avant $S_1(\tau)$ à un instant t_1, et une seconde fois par la face arrière S_2, à un instant t_2. Dans l'intégration par rapport à τ requise par les formules (267) il n'y a lieu de considérer J qu'au voisinage immédiat des instants t_1 et t_2 en question ; dans ce voisinage on aura, pour la distance δ l'évaluation (264), dans le premier cas :

$$\delta = | t_1 - \tau | \, U_n^{(1)}(t_1) ;$$

ou, d'une façon analogue :

$$\delta = | t_2 - \tau | \, U_n^{(2)}(t_2) ,$$

dans le second cas.

La distribution correspondante dans u sera donc :

$$(285) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} 2\pi (a - c' \cos nx)_{xyzt_1} \frac{e^{-\frac{\rho (t_1-\tau)^2 U_n^{(1)2}(t_1)}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \, d\tau \\ & + \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} 2\pi (a - c' \cos nx)_{xyzt_2} \frac{e^{-\frac{\rho (t_2-\tau)^2 U_n^{(2)2}(t_2)}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \, d\tau . \end{aligned} \right.$$

Comme on a $t_0 < t_1 < t_2 < t$, puisque M est *dans* Ω, on peut, sans inconvénient, remplacer dans les intégrations $t - \tau$ par $t - t_1$ ou $t - t_2$; puis, en posant par exemple :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu(t-t_1)}}\, U_n^{(1)}(\tau - t_1) = \lambda ,$$

le premier terme de la somme précédente devient approximativement :

$$\frac{4\sqrt{\pi}}{U_n^{(1)}(t_1)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_1} ,$$

L'expression (285) devient donc :

$$\frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_1} + \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_2)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_2} .$$

La contribution due à l'expression (280) qui intervient dans I donne maintenant, comme dans le cas précédent :

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma .$$

viendra donc, dans le cas actuel :

$$(286) \begin{cases} u(x, y, z, t) = \dfrac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_1} \\[2ex] \qquad + \dfrac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)}(a - c' \cos nx)_{xyzt_2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\[2ex] - \displaystyle\int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{s(\tau)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \partial\sigma . \\[2ex] v(x, y, z, t) = \ldots \\[1ex] w(x, y, z, t) = \ldots \end{cases}$$

3° *Point intérieur à* $G(t_0)$. — Dans ce cas, l'instant t_1 n'existera pas, mais l'instant t_2 existera; on aura les mêmes formules qu'on vient d'écrire, mais en supprimant le premier terme.

$$(287)\quad \begin{cases} u(x, y, z, t) = \dfrac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} (a - c' \cos nx)_{xyzt_2} \\[2ex] \quad + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \displaystyle\int_{t_0}^{t} d\tau \dfrac{\partial}{\partial x} \iint_{S(\tau)} \left(a \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma . \\[2ex] v(x\, y\, z\, t) = \dots \\[1ex] w(x\, y\, z\, t) = \dots \end{cases}$$

4° *Point intérieur à* $G(t)$. — Même résultat, en échangeant t_1 et t_2 ; t_1 existe, et t_2 n'existe pas. On a :

$$(288)\quad \begin{cases} u(x, y, z, t) = \dfrac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (a - c' \cos nx)_{xyzt_1} \\[2ex] \quad + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \displaystyle\int_{t_0}^{t} d\tau \dfrac{\partial}{\partial x} \iint_{S(\tau)} \left(a \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \dots \right) d\sigma . \\[2ex] v(x\, y\, z\, t) = \dots \\[1ex] w(x\, y\, z\, t) = \dots \end{cases}$$

5° *Point sur la paroi arrière* $S_2(t)$, *de* $G(t)$. — L'instant t_1 subsiste, mais l'instant t_2 coïncide avec t.

Dans l'expression (285) il n'y a donc plus lieu de considérer l'intervalle $t_2 - \varepsilon$, $t_2 + \varepsilon$, mais seulement $t_2 - \varepsilon$, t_2, ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t}^{t} 2\pi (a - c' \cos nx)_{xyzt} \frac{e^{-\frac{\rho (t-\tau)^2 U_n^{(2)2}(t)}{4\mu (t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \, d\sigma ,$$

pour la partie correspondante. En posant $\dfrac{\rho}{4\mu} U_n^{(2)2} (t - \tau) = \lambda^2$, on est amené encore à l'expression :

$$\frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)} (a - c' \cos nx)_{xyzt}$$

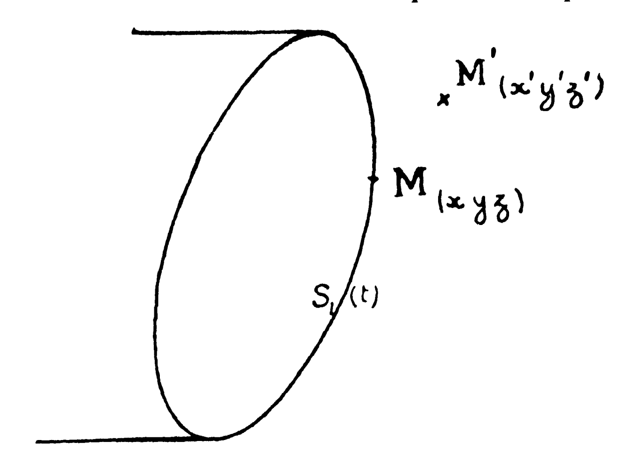
De sorte qu'on a encore l'expression (286), avec cette particularité que $t_2 = t$.

6° *Point sur la paroi avant* $S_1(t)$ *de* $G(t)$. L'instant t_1 existe seul, et il coïncide avec t.

Comme dans le cas précédent, on voit qu'on a encore les formules (288), avec $t_1 = t$.

Application au caractére du mouvement au voisinage de $S_1(t)$ et de $S_2(t)$.

Considérons à un même instant t, un point $M(xyz)$ du front avant $S_1(t)$ du corps solide, et un point $M'(x'y'z')$ voisin de M, en avant, dans le fluide. D'après ce que nous venons de



voir, les trois composantes de la vitesse en M seront fournies par les formules (288), avec $t_1 = t$; elles seront, d'autre part, égales à $U(t)$, 0, 0, d'après les conditions aux limites imposées. On aura donc :

$$(289)\quad \left\{\begin{aligned}
U(t) &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)}(a - c'\cos nx)_{xyzt} \\
&+ \frac{\partial \varphi(xyzt)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x}\iint_{S(\tau)}\left(a\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots\right)d\sigma . \\
0 &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)}(b - c'\cos ny)_{xyzt} \\
&+ \frac{\partial \varphi(xyzt)}{\partial y} - \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial y}\iint_{S(\tau)}\left(a\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots\right)d\sigma . \\
0 &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)}(c - c'\cos nz)_{xyzt}
\end{aligned}\right.$$

$$(289) \quad + \frac{\partial \psi(xyzt)}{\partial z} - \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma.$$

Par ailleurs, la vitesse au point M' voisin sera donnée par les formules analogues à (281), puisque M' est dans la région non encore atteinte par la paroi. On a donc en M' :

$$(290) \left\{ \begin{aligned} & u(x', y', z', t) = \frac{\partial \psi(x', y', z', t)}{\partial x'} \\ & - \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x'} \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \zeta} \right) d\sigma. \\ & v(x', y, z', t) = \dots \qquad \left(r' = \sqrt{(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + (z'-\zeta)^2}\right) \\ & w(x', y', z', t) = \dots \end{aligned} \right.$$

On voit donc, en faisant tendre le point M' vers le point M, que l'on a :

$$(291) \left\{ \begin{aligned} & \lim u(x', y', z', t) = U(t) + \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} (a - c' \cos nx) = u' \\ & \lim v(x', y', z', t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} (b - c' \cos ny) = v' \\ & \lim w(x', y', z', t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} (c - c' \cos nz) = w' . \end{aligned} \right.$$

Ces limites *ne sont donc pas*, en général, *égales à* $U(t)$, 0, 0. Cela signifie que, pour le mouvement limite convenant à $\mu = 0$, *le liquide ne collera plus au corps* sur la portion antérieure $S_1(t)$ de la surface. Mais il *glissera* le long de la paroi, car la vitesse relative du liquide dans le sens de la normale a pour expression :

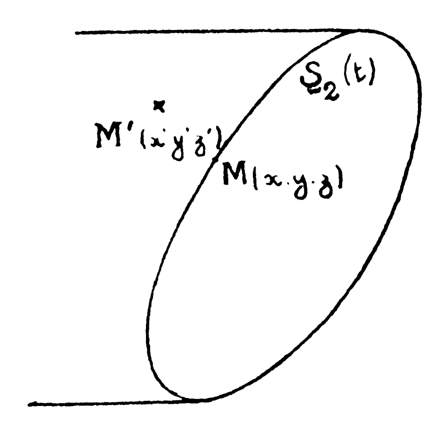
$$\begin{aligned} & (u' - U) \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz \\ & = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} (a \cos nx + b \cos ny + c \cos nz - c') , \end{aligned}$$

c'est-à-dire *zéro*, puisque c' représente justement la composante normale du vecteur (abc).

Nous retrouvons donc exactement ici le même phénomène

limite que nous avions observé dans les exemples plus simples traités aux Chapitres X et XI.

Si nous nous plaçons maintenant, au contraire, *à l'arrière* du solide, le point M étant sur $S_2(t)$, et M′ en arrière, dans la région $\Omega(t)$ déjà balayée par le corps, nous voyons alors que, pour les deux points M et M′, ce sont les formules (286) qu'il convient d'employer dans les deux cas ; ponr M, on aura les deux instants t_1 et t correspondant aux deux premiers termes



des seconds membres ; pour M′ on aura deux instants t'_1 et t'_2 voisins de ceux-ci. En faisant le même calcul que pour la paroi avant, nous écrirons la condition à la paroi, à savoir que la vitesse en M est $U(t)$, 0, 0 ; puis la comparaison des formules relatives aux deux points nous montrera que, si M′ tend vers M′, on a :

$$\lim u\,(x', y', z', t) = U(t)$$

$$\lim v\,(x', y', z', t) = 0$$

$$\lim w\,(x', y', z', t) = 0\ .$$

C'est-à-dire que, *pour la paroi arrière, la condition de contact reste vérifiée, même dans le cas limite où* μ *devient nul.*

CHAPITRE XV

UNE DÉTERMINATION DES FONCTIONS a, b, c, ψ

Nous sommes dès maintenant en mesure d'écrire les équations de condition que doivent déterminer les inconnues a, b, c, ψ. Nous les avons du reste déjà envisagées, ce sont celles qui expriment que la vitesse *sur* les parois, avant ou arrière ($S_1(t)$ ou $S_2(t)$) est égale à la vitesse de translation du solide. Nous obtenons ainsi les formules suivantes (formules 288 ou 286) dans lesquelles nous mettrons en évidence séparément les deux faces $S_1(\tau)$ et $S_2(\tau)$ de la surface $S(\tau)$, en désignant par a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2, les déterminations des fonctions (a, b, c) — fonctions du point $\xi\eta\zeta$ sur $S(\tau)$ — qui conviennent à l'avant ou à l'arrière. De même c'_1 et c'_2 sont les les composantes normales des deux vecteurs accentués. Les équations du problème sont par suite :

$$(292)\quad \left\{\begin{aligned}
&U(t) = \frac{4\pi}{U^{(1)}(t)}[a_1 - c'_1 \cos nx]_{xyzt} \\
&- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma \\
&- \int_{t}^{t_0} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma \\
&+ \frac{\partial \psi}{\partial x}. \\
&O = \frac{4\pi}{U^{(1)}(t)}[b_1 - c'_1 \cos ny]_{xyzt} \\
&- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial y} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma
\end{aligned}\right.$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial y} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

(292)

$$0 = \frac{4\pi}{U^{(1)}(t)} [c_1 - c'_1 \cos nz]_{xyzt}$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

$$U^{\cdot}(t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (a_1 - c'_1 \cos nx)_{xyzt_1}$$

$$+ \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)} (a_2 - c'_2 \cos nx)_{xyzt}$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) d\sigma$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots \right) \partial\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

(293)

$$0 = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (b' - c'_1 \cos ny)_{xyzt_1}$$

$$\frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)} (c_2 - c'_2 \cos ny)_{xyzt} - \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial y} \iint_{S_1(\tau)} (\dots) d\sigma$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial y} \iint_{S_2(\tau)} (\dots) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

$$0 = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (c_1 - c'_1 \cos nz)_{xyzt_1}$$

$$\frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)} (c_2 - c'_2 \cos nz)_{xyzt} - \int_{t_0}^{t} d\sigma \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S_1(\tau)} (\dots) d\sigma$$

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{S_2(\tau)} (\dots) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

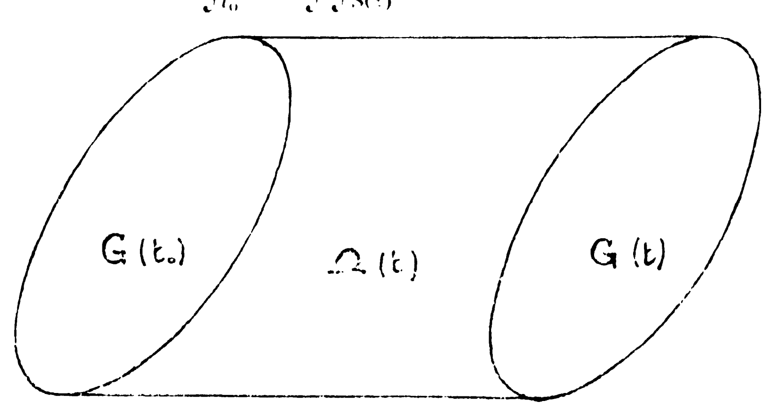
Telles sont les six équations dont nous désirons profiter pour trouver un système de solutions pour les fonctions (a_1, b_1, c_1) (a_2, b_2, c_2) attachées aux deux faces du corps solide, et la fonction (harmonique)

Ces équations nécessitent, pour être employées, certaines précautions. Les expressions telles que :

$$\iint_{S_1(\tau)} a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, d\sigma$$

sont des dérivées de potentiels de simple couche ; de telles dérivées comportent, ainsi qu'on l'a vu, des discontinuités au passage à travers la surface $S_1(\tau)$; *a fortiori* les dérivées de ces expressions comportent aussi des circonstances analogues. Pour les termes en question, il sera entendu que les intégrales écrites représentent la valeur limite des intégrales $\int_{t_0}^{t}$, dans lesquelles on aura isolé (et retranché) un petit intervalle de temps, d'amplitude ε ou 2ε, autour de l'instant qui provoque la difficulté, — et dans lesquelles on fera tendre ε vers zéro.

Ceci posé, nous allons utiliser le procédé élégant de M. Oseen, pour transformer en intégrales de volumes, plus aisément transformables, les intégrales $\int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S(\tau)} (\ldots)\, d\sigma$ qui interviennent ici.



Pendant l'intervalle de temps (t_0, t) la surface $S_1(\tau)$ balaie tout le volume $G(t_0) + \Omega(t)$. Et à chaque instant, $d\sigma \times U_n^{(1)}(\tau)\, d\tau$ ou $d\sigma \times U_n^{(2)}(\tau)\, d\tau$ représente le petit élément de volume $d\omega$, décrit par l'élément de surface $d\sigma$ pendant le temps $d\tau$. Nos intégrales vont donc pouvoir s'interpréter comme des intégrales triples, étendues à des volumes évidents.

Posons :

$$(294)\quad \left\{ \begin{aligned} L = & \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma \\ & + \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma \end{aligned} \right.$$

et plaçons-nous tout d'abord sur la face *avant* du corps.

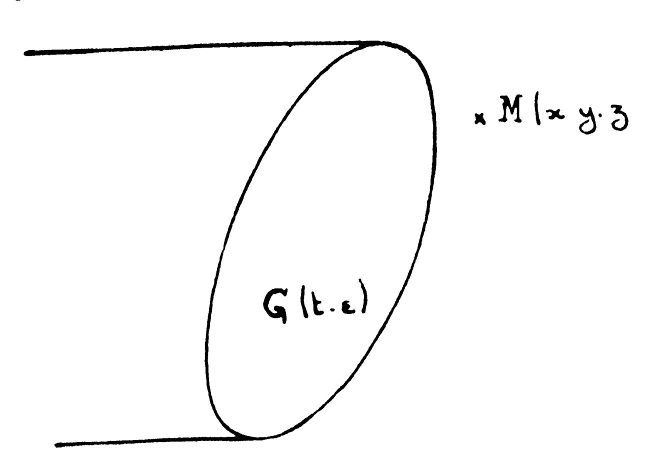
Surface S_1 (formules 292). — Le point M étant alors sur $S_1(t)$, nous aurons ici :

(295)
$$L = \iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left[\frac{a_2}{U_n^{(2)}(\tau)} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} + \frac{b_2}{U_n^{(2)}} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} + \frac{c_2}{U_n^{(2)}} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} \right] d\omega$$
$$+ \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{a_1}{U_n^{(1)}(\tau)} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} + \dots \right) d\omega$$
$$\iiint_{G(t-\varepsilon)} \left(\frac{a_1}{U_n^{(1)}(\tau)} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} + \dots \right) d\omega.$$

Posons, pour abréger l'écriture :

(296)
$$\alpha = \frac{a_1}{U_n^{(1)}} + \frac{a_2}{U_n^{(2)}}, \qquad \beta = \frac{b_1}{U_n^{(1)}} + \frac{b_2}{U_n^{(2)}},$$
$$\gamma = \frac{c_1}{U_n^{(1)}} + \frac{c_2}{U_n^{(2)}},$$

et observons qu'on peut adopter cette définition dans $G(t_0)$ (où a_1 b_1 c_1 n'existent pas) en convenant que $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ dans $G(t_0)$.



La formule (295) donne alors sur S'_1 :

(297)
$$L = \iiint_{G_0+\Omega} \left(\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial x} + \beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial x} \right) d\omega$$
$$+ \lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G(t-\varepsilon)}$$
$$\left(\frac{a_1}{U_n^{(1)}} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi} + \frac{b_1}{U_n^{(1)}} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta} + \frac{c_1}{U_n^{(1)}} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta} \right) d\omega.$$

Cette dernière limite existe-t-elle effectivement ?

Pour nous en assurer, nous devons examiner si la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}$ de l'expression :

$$(298) \qquad \mathrm{H} = \iiint_{G(t-\varepsilon)} \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \partial \omega ,$$

où $\alpha' \beta' \gamma'$ désignent $\frac{a_1}{U_n^{(1)}}$, $\frac{b_1}{U_n^{(1)}}$, $\frac{c_1}{U_n^{(1)}}$, existe quand ε tend vers zéro, et quand par suite le point M, *extérieur* à $G(t-r)$, vient se placer sur cette surface. Comme on sait, les dérivées partielles des expressions telles que :

$$\iiint_G \alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\omega ,$$

sont discontinues. Mais on a :

$$\iiint_G \alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\omega = \iiint_G \frac{\partial \frac{\alpha'}{r}}{\partial \xi} d\omega - \iiint_G \frac{\partial \alpha'}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\omega$$

c'est-à-dire d'après (243) :

$$(299) \qquad \iiint_G \alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\omega = + \iint_S \frac{\alpha'}{r} \cos n_e x \, d\sigma - \iiint_G \frac{\partial \alpha'}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\omega ,$$

la normale n_e étant vers l'extérieur du volume G.

Au second membre de cette formule, le potentiel de volume

$$\iiint_G \frac{\partial \alpha'}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\omega$$

reste continu ainsi que ses dérivées premières, ainsi qu'on l'a rappelé au Chapitre XII, si $\frac{\partial \xi}{\partial \alpha'}$ est supposée existante et continue. En opérant ainsi sur chaque portion de H, on voit que l'existence et la discontinuité possible des dérivées de H dépendra uniquement de l'intégrale de surface :

$$(300) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{K} &= \iint_S \left(\frac{\alpha'}{r} \cos n_e x + \frac{\beta'}{r} \cos n_e y + \frac{\gamma'}{r} \cos n_e z \right) d\sigma \\ &= \iint_S \frac{c'}{U_n^{(1)}} \frac{1}{z} d\sigma , \end{aligned} \right.$$

la dernière valeur résultant de la définition de c'.

Il s'agit donc simplement d'un potentiel de simple couche. Or, nous avons vu à la fin du Chapitre XII, qu'une dérivée oblique à la surface existait moyennant une certaine condition, réalisée d'elle-même pour la direction normale, mais pas certainement pour les autres. *Nous devons donc admettre provisoirement que les conditions voulues soient réalisées*, et nous devrons ensuite spécifier très précisément la valeur d'une dérivée de K, et par suite de H lorsque le point M sera sur S, puisque nous savons que les dérivées de K (sauf dans les directions tangentes à S) sont discontinues, la discontinuité, pour la dérivée $\frac{\partial K}{\partial x}$, ou pour $\frac{\partial H}{\partial x}$, étant ici égale à :

$$(301) \qquad -4\pi \frac{c'_1}{U_n^{(1)}} \cos n'x \, ,$$

n' désignant ici la normale vers l'intérieur de la surface qui porte la couche, c'est-à-dire vers l'intérieur de la surface $S(t)$.

Le point M se rapprochant de S *par l'extérieur*, la limite que nous cherchons actuellement, quand ε tend vers zéro, pour le dernier terme de la formule (297) existe, sous le bénéfice de l'hypothèse faite, et elle doit être notée :

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \iiint_{\omega(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}}.$$

Nous avons donc :

$$(302) \quad \begin{cases} L = \displaystyle\iiint_{G_0+\Omega} \left(\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi \, \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta \, \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta \, \partial x} \right) d\omega \\ \quad + \displaystyle\frac{\partial}{\partial x_e} \iiint_{\omega(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}}. \end{cases}$$

M. Oseen assujettit alors les fonctions $\alpha \beta \gamma$ aux conditions suivantes :

$$(303) \qquad 1^{\circ} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = 0$$

dans tout le volume $G(t_0) + \Omega(t)$, où $\alpha \beta \gamma$ sont définies comme fonctions de $\xi \eta \zeta$, sur chaque position successive de $S_2(\tau)$.

$$(304) \qquad 2^{\circ} \qquad \alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz = 0$$

sur toute la surface cylindrique qui limite Ω (c'est-à-dire, pour

chaque instant τ, sur la courbe de contact du cylindre avec $S(\tau)$, et sur $S_2(t_0)$).

Si les calculs qui vont suivre permettent alors de définir toutes les fonctions inconnues, nous obtiendrons ainsi *une* solution du problème proposé. Rien ne dit qu'il n'y en ait pas d'autres, jusqu'à plus ample informé.

Des conditions imposées à α, β, γ, il résulte tout d'abord qu'on a (f. 244) :

$$(305)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint_{G_0+\Omega} \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\omega \\ &= - \iint_{S_2(t)} (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned} \right.$$

Si donc nous posons :

$$(306)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \psi(x, y, z, t) \\ &+ \iint_{S_2(t)} (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz) \frac{d\sigma}{r} \\ &- \iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}}, \end{aligned} \right.$$

φ sera, comme ψ, une fonction harmonique, puisque les termes ajoutés à ψ sont des potentiels ou des dérivées de potentiels, et les formules (292) relatives à $S_1(t)$ s'écriront :

$$(307)\quad \left\{ \begin{aligned} U(t) &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} (a_1 - c'_1 \cos nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} (b_1 - c'_1 \cos ny) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 &= \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} (c_1 - c'_1 \cos nz) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

les calculs conduisant aux deux dernières étant identiques à ceux qu'on vient de développer pour la première.

Laissant provisoirement de côté la détermination de φ, et, supposant cette fonction connue, cherchons à tirer des équations (307) les fonctions a_1, b_1, c_1. En notant que

$$(308)\qquad c'_1 = a_1 \cos nx + b_1 \cos ny + c_1 \cos nz,$$

on constate que les équations linéaires (307) en a_1, b_1, c_1 ont un déterminant nul. Il y a une condition de compatibilité à écrire, et cette condition est visiblement obtenue en multipliant les

équations respectivement par $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ et ajoutant. Il vient ainsi :

(309) $$\frac{d\varphi}{dn} = \mathrm{U}(t)\cos nx \qquad (\text{sur } \mathrm{S}_1(t)).$$

On peut ensuite prendre (par exemple) c_1 quelconque, et tirer a_1 et b_1 des équations (307); il revient au même de prendre c'_1 quelconque, et de tirer ensuite a_1, b_1 et c_1 des mêmes équations. Nous choisirons la solution particulière pour laquelle on a :

(310) $$c'_1 = 0.$$

Il vient alors, sur la surface $\mathrm{S}_1(t)$:

(311) $$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathrm{U}_n(t)}{4\pi}\left(\mathrm{U} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \\ b_1 &= -\frac{\mathrm{U}_n(t)}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ c_1 &= -\frac{\mathrm{U}_n(t)}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Examinons maintenant les équations provenant de la face arrière $\mathrm{S}_2(t)$ (éq. 293).

Face arrière. — Dans la première équation (293), nous avons d'abord à transformer l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x}\iint_{\mathrm{S}_1(\tau)}\left(a_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \dots\right)d\sigma,$$

qui représente la valeur limite, pour $\varepsilon = 0$, de la somme :

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x}\iint_{\mathrm{S}_1(\tau)}\left(a_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \dots\right)d\sigma$$

$$+\int_{t_1+\varepsilon}^{t} d\tau \frac{\partial}{\partial x}\iint_{\mathrm{S}_1(\tau)}\left(a_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \dots\right)d\sigma,$$

écrite en isolant l'instant t_1 où $\mathrm{S}_1(\tau)$ passe au point $\mathrm{M}(x\,y\,z)$ de la face arrière $\mathrm{S}_2(t)$. On en conclut, comme plus haut, que la valeur limite (quand elle existe) doit être notée :

$$
(312)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{\Omega(t)}\left(a_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+b_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+c_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\omega}{U_n^{(1)}}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{G(t)}\left(a_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\ldots\right)\frac{d\omega}{U_n^{(1)}}
\end{aligned}\right.
$$

l'indice e marquant toujours qu'il s'agit des valeurs limites des dérivées quand on approche de la surface S par l'extérieur. A cause de la convention faite concernant $a_1\, b_1\, c_1$, qu'on a considérés comme nuls dans $G(t_0)$, la première des deux intégrales peut être étendue au volume $G(t_0)+\Omega(t)$.

La première formule (293) contient encore l'intégrale :

$$
(313)\quad \int_{t_0}^{t} d\tau\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S_2(\tau)}\left(a_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+c_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\sigma\,,
$$

que nous devons considérer comme la limite, pour $\varepsilon=0$, de l'expression :

$$
(314)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S_2(\tau)}\left(a_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\ldots\right)d\sigma\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\iiint_{G(t_0)+\Omega'(t)}\left(a_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\ldots\right)\frac{d\omega}{U_n^{(2)}}\,;
\end{aligned}\right.
$$

$\Omega'(t)$ représente le volume $\Omega(t)$, diminué du petit espace compris dans le cylindre entre $S_2(t-\varepsilon)$ et $S_2(t)$. La limite de l'expression qu'on vient d'écrire au second nombre de (314) est donc la limite de la dérivée de l'intégrale :

$$
\iiint_{G(t_0)+\Omega'(t)}\left(a_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\ldots\right)\frac{d\omega}{U_n^{(2)}}\,,
$$

quand on s'approche du point M par l'extérieur du volume $\Omega(t)$. Par conséquent, et toujours sous réserve des conditions d'existence des dérivées, l'expression (313) devra être remplacée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G_0+\Omega} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) \frac{d\omega}{U_n{}^{(2)}},$$

dérivée prise vers l'*extérieur* de $\Omega(t)$, c'est-à-dire vers l'*intérieur* de $S(t)$; nous la noterons donc :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \iiint_{G_0+\Omega} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) \frac{d\omega}{U_n{}^{(2)}},$$

l'indice e étant comme ci-dessus relatif à la surface $S(t)$. Mais, en se reportant aux calculs développés il y a un instant à propos de la fonction H (formule 298) et en y échangeant simplement (a_1, b_1, c_1) avec (a_2, b_2, c_2) nous constaterons par ces calculs mêmes, que la discontinuité de la dérivée en question, quand on traverse la surface $S(t)$ au point M, est de $-\frac{4\pi}{\Omega_n{}^{(2)}} c''_2 \cos n'x$, quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de S ; n' étant la normale à S vers l'intérieur de S, et c''_2 étant la composante normale du vecteur $(a_2\, b_2\, c_2)$ suivant la normale extérieure au volume $G_0+\Omega$ de l'intégrale de volume transformée (cf. 299), c'est-à-dire suivant la normale n' intérieure à S. On a précisément :

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \iiint = \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint + 4\pi \frac{c''_2}{U_n{}^{(2)}} \cos n'x.$$

Mais comme la normale n' intérieure à $S(t)$ est justement opposée à la normale n employée jusqu'ici, nous aurons $c''_2 = -c'_2$, $\cos n'x = -\cos nx$, et nous voyons que l'intégrale (213) doit être remplacée, avec nos notations, par :

$$(315) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4\pi \frac{c'_2}{U_n{}^{(2)}} \cos nx + \\ & \frac{\partial}{\partial x_e} \iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) \frac{d\omega}{U_n{}^{(2)}}. \end{aligned} \right.$$

En retenant que c'_1 est nul (éq. 310), et transportant les résultats (312 et 315) dans la première formule (293), il vient donc :

$$(316)\quad \left\{\begin{aligned} U(t) &= 4\pi \frac{a_1}{U_n^{(1)}(t_1)} + \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)}(a_2 - c'_2 \cos nx) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots\right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots\right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}} \\ &+ 4\pi \frac{c'_2}{U_n^{(2)}} \cos nx \\ &- \frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \dots\right) \frac{d\omega}{U_n^{(2)}} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Au second membre, le troisième et le sixième terme se condensent en un seul, qui d'après la définition de α, β, γ (f. 296) qui, d'après des calculs déjà effectués (f. 305) s'écrit :

$$\begin{aligned} &- \frac{\partial}{\partial x_e}\iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) d\omega \\ &= \frac{\partial}{\partial x_e}\iint_{S_2(t)} (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Introduisant enfin la même fonction harmonique $\varphi\,(xzyt)$ que plus haut, définie par l'équation (306), on voit immédiatement que l'équation (316) et les deux analogues provenant de (293), deviennent les suivantes :

$$(317)\quad \left\{\begin{aligned} U(t) &= 4\pi\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ O &= 4\pi\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ O &= 4\pi\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations nous détermineront α, β, γ, sur $S(t)$ en fonction de φ. Les formules de définition de $\alpha\beta\gamma$ donneront ensuite :

$$(318)\qquad a_2 = U_n^{(2)}\left(\alpha - \frac{U_n^{(1)}}{a_1}\right), \quad b_2 = \dots \quad c_2 = \dots$$

Toute la difficulté se trouve donc maintenant reportée sur la fonction $\varphi\,(xyzt)$, dans laquelle ψ s'est trouvée englobée. Cette

fonction doit être telle que les conditions imposées dans le courant des calculs soient toutes remplies. Ces conditions sont les suivantes :

D'abord φ est une fonction harmonique :

(319) $$\Delta \varphi = 0.$$

Ensuite, nous avons vu (éq. 309) que, à l'avant du corps, nous devions avoir :

(320) $$\frac{d\varphi}{dn} = U(t) \cos nx \qquad (\text{sur} \quad S_1(t)).$$

Enfin, les fonctions $(\alpha \beta \gamma)$ ont été assujetties aux conditions (303) (304). Pour expliciter (303), qui doit avoir lieu sur toute surface $S_2(t)$, imaginons qu'on ait écrit sous la forme $t = t(x, y, z)$ l'équation de $S_2(t)$, les fonctions $(\alpha \beta \gamma)$ tirées de (317) seront les suivantes sur chaque surface $S_2(t)$:

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} U[t(x, y, z)] - \frac{\partial \varphi[x, y, z, t(x, y, z)]}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi[x, y, z, t(x, y, z)]}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi[x, y, z, t(x, y, z)]}{\partial z}$$

et la relation (303) s'écrira explicitement (avec les notations x, y, z) :

$$\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{dU}{dt} \frac{\partial t}{\partial x},$$

équation où $\Delta \varphi$ disparaîtra de lui-même. D'ailleurs,

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial t}{\partial z}$$

dirigent la normale à la surface $t = t(x, y, z)$ pour t constant, c'est-à-dire la normale à la surface $S_2(t)$. On a donc :

$$\frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\cos nx} = \frac{\frac{\partial t}{\partial y}}{\cos ny} = \frac{\frac{\partial t}{\partial z}}{\cos nz},$$

et la condition précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} \cos nx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} \cos ny + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} \cos nz = \frac{dU}{dt} \cos nx.$$

On doit donc avoir la condition :

$$(321) \qquad \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{dU}{dt}\cos nx \qquad [\text{sur } S_2(t)].$$

Enfin, la condition (304) revient à $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ aux points de séparation, sur chaque surface S, entre S_1 et S_2. Cette condition sera, en général, vérifiée d'elle-même comme cas limite de (320) quand sur S_1 on se rapproche de la ligne de séparation en question.

Les conditions (319) (320) (321) déterminent en général une fonction $\varphi(x\,y\,z\,t)$, et par suite un mouvement du fluide, en adjoignant la condition supplémentaire que, aux grandes distances, la vitesse de liquide soit nulle, sauf peut-être aux endroits où le solide $S(t)$ aurait déjà passé dans son mouvement. Nous constaterons ce fait par des exemples concrets.

Cas du mouvement permanent. — Admettons qu'un mouvement permanent, par rapport au solide, ait été obtenu ; cela veut dire que la vitesse U est devenue constante, et que la fonction $\varphi(x, y, z, t)$, et, par suite, toutes les fonctions a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, — ne dépendent de t que par l'intermédiaire de $x - Ut$; on a $\varphi = \varphi(x - Ut, y, z)$. La région $\Omega(t)$ est alors constituée par le volume cylindrique indéfini à l'arrière de $S_2(t)$, car l'établissement du régime demande un temps théoriquement infini. La condition (321) se réduit dans ce cas à :

$$(321') \qquad \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 \qquad [\text{sur } S_2(t)]$$

puisque :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -U\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Expression des vitesses et des pressions moyennes dans le cas du mouvement permanent.

Restons dans le cas du mouvement permanent, et cherchons à déterminer (u, v, w, p) en chaque point du liquide.

1° *Région extérieure à* $\Omega(t) + G(t)$. — Plaçons d'abord le point $M(x, y, z)$ dans la région qui n'a pas encore été atteinte par le solide $S(t)$ à l'instant t. Nous avons alors déjà vu (éq. 282-283)

que les vitesses (u, v, w) dépendaient d'un potentiel que nous avons appelé φ_1 ; il est manifeste que ce potentiel coïncide avec notre fonction φ définie par (306), car c'est exactement l'intégrale qui figure dans φ_1 qui, par diverses transformations, nous a fourni l'expression qui figure dans φ, — la quantité ψ étant commune aux deux formules. La seule particularité est qu'aucune difficulté n'intervient ici pour préciser les dérivées à intervenir dans u, v, w, le point M n'étant pas atteint par $S_1(\tau)$ ni par $S_2(\tau)$ entre t_0 et t. Enfin, à l'extérieur du volume $\Omega(t) + G(t)$, les nombres $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$ n'existent pas, et on doit dans (306) les considérer comme nuls. On a donc dans le cas présent :

$$(322) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Reste à connaître la pression moyenne p. Pour cela, nous nous reporterons à la dernière formule (270) :

$$p(x\, y\, z\, t) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho \iint_{S(t)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma.$$

Or, d'après la formule (282) qui définit $\varphi_1 (= \varphi)$, il est évident que le second nombre est égal à $\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$. On a donc dans l'espace actuellement envisagé :

$$(324) \qquad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

2° *Région* $\Omega(t)$. — Plaçons maintenant, à l'instant t, le point M dans la région arrière $\Omega(t)$, c'est le seul cas qui nous reste à envisager, puisqu'à l'instant t il n'y a pas de point de liquide à l'intérieur $G(t)$ de $S(t)$.

Les formules qui détermineront la vitesse (u, v, w) au point M seront alors les formules (286). En répétant textuellement dans ce cas, les calculs qui ont été faits à propos des équations (293), et en désignant par t_1 et t_2 les deux instants où $S_1(\tau)$ ou $S_2(\tau)$ respectivement passent en M, il viendra par exemple :

$$u(x, y, z, t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (a_1)_{xyzt_1} + \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} (a_2 - c'_2 \cos nx)_{xyzt_2}$$

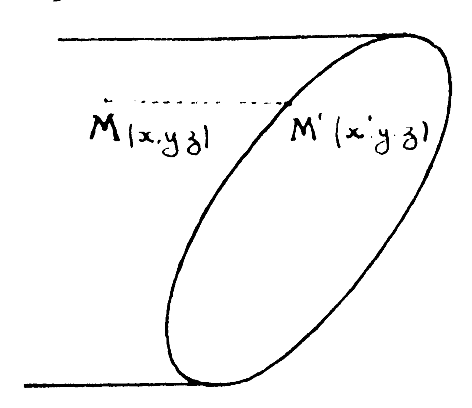
$$+ \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[- \iint_{S_2(t)} (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz)\, d\sigma \right.$$

$$+ \iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} + \ldots \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}} \Bigg]$$

c'est-à-dire, à cause de la définition de φ, la première des trois formules ci-dessous :

(324)
$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (a_1)_{xyzt_1} \\ &+ \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} (a_2 - c'_2 \cos nx)_{xyzt_2} ; \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (b_1)_{xyzt_1} \\ &+ \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} (b_2 - c'_2 \cos ny)_{xyzt_2} ; \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} (c_1)_{xyzt_1} \\ &+ \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} (c_2 - c'_2 \cos nz)_{xyzt_2} \end{aligned} \right.$$

équations qui ont exactement la même forme que (316) — ou 317 — à cela près que t_1 et t_2 sont maintenant relatifs au point M.



Introduisons le point M' de coordonnées (x', y, z) situé sur $S_2(t)$, à l'intersection avec la parallèle à OX menée par M. Les deux instants qui pour M' jouent le même rôle que t_1 et t_2 pour M, pourront s'écrire $t_1 + \theta$ et $t_2 + \theta$, — ce dernier du reste égal à t — en désignant par θ la durée de la translation de M en M', c'est-à-dire le nombre défini par :

(325)
$$U\theta = x' - x.$$

Nous avons observé plus haut, que, dans l'hypothèse du mouvement permanent, les nombres a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 ne dépen-

draient de t que par l'intermédiaire de $(x - \mathrm{U}t)$. Les formules (324) sont donc de la forme :

$$(326) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z, t) + \mathrm{K}_1(x - \mathrm{U}t_1, y, z) \\ &\quad + \mathrm{K}_2(x - \mathrm{U}t_2, y, z) \\ v \ldots &= \ldots \\ w \ldots &= \ldots \end{aligned} \right.$$

Appliquant les mêmes formules au point M′, dont la vitesse est connue et égale à U, 0, 0, il vient :

$$(327) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x', y, z, t) + \mathrm{K}_1[x' - \mathrm{U}(t_1 + \theta), y, z] \\ &\quad + \mathrm{K}_2[x' - \mathrm{U}(t_2 + \theta), y, z) \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x', y, z, t) + \ldots \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x', y, z, t) + \ldots \end{aligned} \right.$$

L'égalité (325) assure immédiatement que les termes tels que $\mathrm{K}_1(x - \mathrm{U}t_1, y, z)$ et $\mathrm{K}_1[x' - \mathrm{U}(t_1 + \theta), y, z]$ sont identiques, et par suite nous obtenons dans $\Omega(t)$ les formules suivantes :

$$(328) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \mathrm{U} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}'} \\ v(x, y, z, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\mathrm{M}'} \\ w(x, y, z, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\mathrm{M}'} \end{aligned} \right.$$

la notation $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}'}$ représentant ce que devient $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(xyzt)$ lorsqu'on y remplace x par l'abscisse du point M′ placé comme on l'a dit, sur $\mathrm{S}_2(t)$.

Quand à la pression moyenne p, elle sera donnée encore par la quatrième formule (270) qui peut s'écrire :

$$p(x, y, z, t) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho \iint_{\mathrm{S}_1(t)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) d\sigma$$
$$+ \rho \iint_{\mathrm{S}_2(t)} \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) d\sigma.$$

Or, on peut remarquer que l'équation (306) est équivalente à la suivante, dont elle provient par les transformations qui ont été développées :

$$\varphi(xyzt) = \psi(xyzt) - \iiint_{G(t_0)+\Omega(t)} \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) d\omega$$

$$- \iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) \frac{d\omega}{U_n{}^{(1)}},$$

ou encore de :

$$\varphi(xyzt) = \psi - \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) d\sigma$$

$$- \int_{t_0}^{t} d\tau \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \ldots \right) d\sigma.$$

On en conclut donc qu'on a, comme dans le premier cas :

(329) $$p = - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Résumé et conclusions. — Dans le cas de la configuration *permanente*, le problème est ramené à trouver une fonction φ, régulière à l'extérieure de $S(t)$ et satisfaisant à :

(330) $$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \quad \text{(partout)} \\ \dfrac{d\varphi}{dn} = U \cos nx \quad (\text{sur } S_1) \\ \dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 \quad (\text{sur } S_2) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{aux grandes distances,} \\ \text{en dehors de } \Omega(t)\end{array}\right). \end{array} \right.$$

Les vitesses et pressions moyennes sont alors :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

hors du cylindre $\Omega(t)$, et :

$$u = U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{M'}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{M'}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{M'}$$

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

dans le cylindre $\Omega(t)$.

On a ainsi *une* solution du problème que nous nous étions proposé.

Mais plusieurs remarques doivent être faites : tout d'abord, l'existence des dérivées de certaines intégrales, que nous avons été amené à considérer, dépend comme on l'a rappelé, de certaines conditions dont nous ne savons pas si elles sont vérifiées d'elles-mêmes : il faudrait le vérifier *a posteriori* dans chaque cas particulier.

Ensuite, les hypothèses faites, notamment la condition (303) et la condition (310) ne sont peut-être pas nécessaires. Il ne paraît pas prouvé qu'on ne puisse pas définir d'autres solutions en assujettissant les $(\alpha\, \beta\, \gamma,\, a_1\, b_1\, c_1)$ à des conditions différentes. Ce qui semble renforcer cette opinion, c'est la constatation, facile à faire sur les formules groupées dans le tableau (330), que la surface du cylindre $\Omega(t)$ constitue une surface de discontinuité pour les vitesses et les tourbillons, et que cette surface n'est pas simplement une surface de glissement. Peut-être, mais c'est là une simple hypothèse qu'il vaudrait la peine d'élucider, pourrait-on choisir des conditions remplaçant (303) et (310), permettant d'éviter ces discontinuités. Il y a là un champ de recherches du plus grand intérêt.

Quoi qu'il en soit, nous allons, dans les Chapitres ultérieurs, exposer un certain nombre d'exemples concrets, où les calculs détaillés ci-dessus peuvent être explicités pour la détermination de la fonction φ et des éléments qui en résultent. Nous constaterons en passant diverses objections physiques qui s'ajoutent à celles qu'on vient de mentionner. Mais ces développements sont, croyons-nous, intéressants, car les méthodes employées, ou d'autres très analogues, rendront vraisemblablement de grands services dans la recherche de la solution générale, si celle-ci se trouve avoir échappé aux équations précédentes pour les raisons signalées ci-dessus.

CHAPITRE XVI

CALCUL DE LA PRESSION TOTALE DU LIQUIDE SUR LE SOLIDE, DANS DEUX CAS PARTICULIERS IMPORTANTS

Nous avons vu, à la fin du Chapitre précédent, que le problème auquel M. Oseen était parvenu pour le mouvement permanent dans le cas limite où la viscosité tendrait vers zéro, pouvait être considéré comme résolu, si l'on parvenait à trouver un potentiel $\varphi(x - Ut, y, z)$ ne dépendant de t que par l'intermédiaire de la combinaison $(x - Ut)$, et satisfaisant aux conditions rappelées dans le tableau (330).

Nous ferons dans la suite des calculs, abstraction de la variable t, et nous conviendrons de nous occuper simplement de la fonction $\varphi(x, y, z)$ à laquelle se réduit le potentiel ci-dessus pour $t = 0$
Cette fonction doit satisfaire aux conditions :

$$(331)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{(dans tout l'espace)} \\ \dfrac{d\varphi}{dn} = U\cos nx & \text{(à l'avant } S_1 \text{ du solide)} \\ \dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0 & \text{(à l'arrière } S_2 \text{ du solide)} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 & \text{(à l'infini).} \end{array}\right.$$

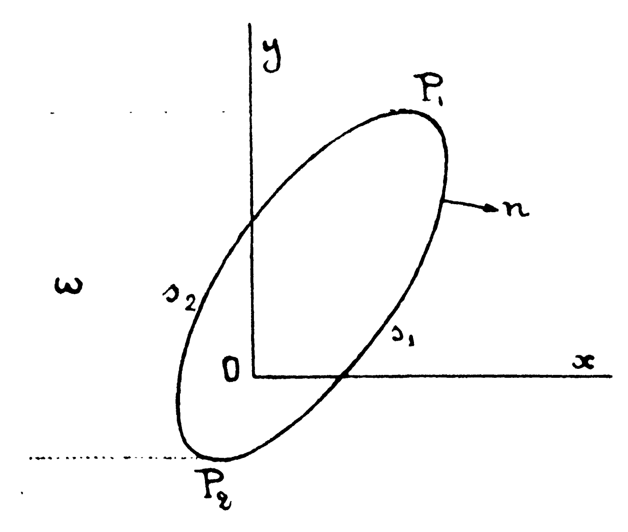
La première question qui se pose, est de savoir si ces conditions déterminent effectivement la fonction φ. Cette question sera élucidée complètement dans le cas particulier où le solide en mouvement est un cylindre indéfini qui se meut dans une direction perpen-

diculaire à ses génératrices. Nous constaterons aussi qu'il existe une fonction φ, dans des cas où le solide est de révolution, et où son mouvement se fait parallèlement à l'axe de révolution, mais dans ce cas nous ne démontrerons pas de théorème général d'existence. Et le cas d'un solide de forme quelconque sera laissé de côté dans ce qui suit. Nous ne pouvons actuellement rien dire sur l'existence d'une solution dans le cas général.

Dans le présent chapitre nous allons examiner quelles simplifications s'introduisent dans les deux cas particuliers indiqués; puis, supposant la fonction φ provisoirement connue, nous établirons dans ces deux cas les formules qui définissent la pression totale du liquide sur le solide baigné.

La condition sur la paroi arrière va prendre, comme on le verra, des formes plus simples permettant d'espérer une détermination pratique de φ.

Cas du cylindre indéfini. Mouvement plan. — Dans le cas du cylindre en mouvement dans la direction ox, normale à la direc-



tion oz des génératrices, tout ce qui se passe dans les plans $z = $ Cte est identique d'un plan à l'autre, et il suffit de considérer une tranche de liquide, d'épaisseur unité, et dont la base soit dans le plan xoy. Nous appellerons s_1 et s_2 les deux portions, à l'avant et à l'arrière de la section droite de notre cylindre dans ce plan.

Le potentiel φ que nous cherchons ne dépendra ici que des variables x et y, et il possédera une fonction harmonique *associée* $\psi(x, y)$ telle que la combinaison $\varphi + i\psi$ soit une fonction analytique de $z = x + iy$.

$$(332) \qquad f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Le changement de sens de la lettre z employée, n'a évidemment

pas d'inconvénient, puisque nous ne nous servons plus de la coordonnée du même nom.

Les propriétés bien connues, rappelées au Chapitre I, nous donnent les relations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

la dérivée de f est

$$(333) \qquad \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_1 + i \psi_1 \, .$$

et c'est une nouvelle fonction analytique de z. Or on sait, éq. (2), qu'entre les dérivées prises suivant deux directions perpendiculaires n et s (voir la *figure*) on a la relation :

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{d\psi_1}{ds} \quad ,$$

l'angle $n\text{M}s$ étant orienté comme l'angle xoy.

On peut donc ici écrire, sur la paroi s_2 arrière

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

s désignant l'arc de cette paroi. La condition $\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$ sur s_2 revient donc à

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

D'où nous tirons :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{Cte (sur } s_2) \, .$$

Mais aux points de séparation $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ entre s_1 et s_2, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dn} = 0, \quad \text{éq. } 304\right) \, .$$

Donc la constante est nulle, et la condition à l'arrière se réduit à :

$$(334) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (\text{sur } s_2) \, .$$

C'est par cette équation qu'il conviendra de remplacer la troisième équation (331).

Les conditions aux limites seront donc ici :

$$(335)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi (x, y) = 0 \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dn} = \mathrm{U} \cos nx \ (\text{sur } s_1) \quad , \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ (\text{sur } s_2) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ (\text{à l'infini}) \ . \end{array} \right.$$

Calcul de la pression totale du liquide sur l'unité de longueur du cylindre. — Nous reviendrons, au Chapitre suivant, sur la détermination du potentiel φ défini par (335). Supposant ce potentiel connu, et appelant p la pression en ce point de la paroi, il est clair que, ds étant l'élément du contour $s_1 + s_2$ supposé décrit dans le sens trigonométrique, la pression totale du liquide sur l'unité de longueur du cylindre sera :

$$(336)\qquad \mathrm{P}_x = \int_{s_1+s_2} p \cos nx \, ds \quad , \quad \mathrm{P}_y = \int_{s_1+s_2} p \cos ny \, ds \quad ,$$

ce qu'on peut évidemment écrire :

$$(337)\qquad \mathrm{P}_x = \int_{s_1+s_2} p \, dy \quad , \quad \mathrm{P}_y = - \int_{s_1+s_2} p \, dx \ ,$$

à cause des formules élémentaires :

$$(338)\qquad dx = - \cos ny \ . \ ds \quad , \quad dy = \cos nx \ . \ ds \ .$$

Si alors nous revenons aux formules (330), elles nous feront connaître l'expression de p, dans le cas où nous admettrons qu'on adopte, pour interpréter les équations des Chapitres antérieurs, l'hypothèse des mouvements *lents*. On aura alors :

$$(339)\qquad p = - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \mathrm{U} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ ,$$

et il n'y aura rien de plus à dire des formules (337) en général.

Mais nous savons que nous pouvons interpréter aussi toutes nos équations (227) et suivantes, sans changer leur forme, en admettant qu'il s'agisse de mouvements *où les tourbillons sont négligeables*. Dans ce cas, on écrira à la place de (339) :

$$(340)\qquad q = \rho \mathrm{U} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ ,$$

et la pression p sera liée à q par l'équation :

$$(341) \qquad p = q - \frac{1}{2} \rho (u^2 + u^2) \, ,$$

qui donne ici

$$(342) \qquad p = \rho \, U \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \, .$$

Nous allons adopter cette manière de voir, et calculer dans ce cas la pression totale. Cette façon de faire se légitime, *a posteriori*, par le fait que l'on constate que, dans tout le domaine extérieur au cylindre, c'est-à-dire à sa section dans le plan xoy, les tourbillons sont nuls dans toute la région non comprise dans l'aire ω (section du cylindre Ω de la théorie des Chapitres précédents) ; et dans ω, on vérifie sur les exemples que les tourbillons sont peu importants, sauf sur les bords, c'est-à-dire sur les parallèles à ox qui enferment s_1 et s_2.

Quoi qu'il en soit, nous adopterons pour l'instant la valeur (342) de p, et nous allons calculer P_x et P_y (éq. 337).

Rappelons que, d'après les résultats du tableau (330), la vitesse $(u \, , v)$ en un point de la paroi sera donnée par :

$$(343) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \, , \; v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \, , & \text{sur } s_1 \\ u = U \, , \; v = o \, , & \text{sur } s_2 \, . \end{array} \right.$$

de sorte que la pression aura les valeurs, distinctes de forme, p_1 ou p_2 sur s_1 ou s_2 :

$$(344) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \rho \, U \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\rho}{2} \left[\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \; ; \\ p_2 = \rho \, U \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\rho}{2} U^2 = p_1 - \dfrac{\rho}{2} \left[U^2 - \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] , \end{array} \right.$$

la dernière expression de p_2 tient compte de ce que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ est nul sur s_2.

On voit donc qu'on aura à intégrer la quantité p_1 sur tout le contour.

Posons :

$$\left\{\begin{aligned} r_x &= -\frac{\rho}{2}\int_{s_1+s_2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dy\ ,\\ r_y &= \frac{\rho}{2}\int_{s_1+s_2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\ . \end{aligned}\right.$$

Nous allons calculer d'abord la quantité :

$$(345)\qquad r = r_y + i r_x = \frac{\rho}{2}\int_{s_1+s_2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right](dx - i\,dy)$$

Posons :

$$(346)\qquad l = l_x + i l_y = \rho\int_{s_1+s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right)\ .$$

Il vient aussitôt :

$$r + il = \frac{\rho}{2}\int_{s_1+s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2(dx + i\,dy) = \frac{\rho}{2}\int_{s_1+s_2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz.$$

Or cette dernière intégrale est nulle car la fonction $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ est analytique, comme f, et la régularité à l'infini entraîne que cette fonction s'annule comme $\frac{1}{|z|^2}$ aux grandes distances (ce point sera du reste vérifié au Chapitre XVII). Au lieu d'intégrer cette fonction sur le contour $s_1 + s_2$, on obiendra, la fonction étant régulière, le même résultat en intégrant, sur une circonférence de centre o et de très grand rayon. D'où immédiatement le résultat annoncé. On a donc :

$$(347)\qquad r_x = -l_x\quad ,\quad r_y = l_y\ .$$

Mais, par ailleurs, on peut écrire, à cause de (338) :

$$l = \rho\int_{s_1+s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{d\varphi}{dn}ds\ ,$$

et, par suite, à cause de (335) :

$$l = \rho\int_{s_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)U\,dy + \rho\int_{s_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dy$$

D'où enfin :

$$(348)\quad \left\{ \begin{aligned} r_x &= -\rho U \int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy - \rho \int_{s_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dy \;; \\ r_y &= -\rho U \int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy \;. \end{aligned} \right.$$

Expression de P_x . — Revenant à P_x , nous trouvons donc :

$$P_x = r_x + \int_{s_1+s_2} \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy - \frac{\rho}{2} \int_{s_2} \left[U^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dy \;,$$

ce qui, en tenant compte de la valeur de r_x , se met immédiatement sous la forme :

$$(349)\qquad P_x = -\frac{\rho}{2} \int_{s_2} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dy \;,$$

expression du reste positive, puisque s_2 est décrit dans le sens des y décroissants.

Autre expression de P_x . — La formule précédente peut évidemment s'écrire :

$$P_x = \frac{\rho}{2} \int_{s_2} \left[\left(U^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dy - \rho U \int_{s_2} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy \;,$$

forme à laquelle l'équation antéprécédente conduit tout naturellement.

Mais, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ étant nul sur s_2 , on a :

$$\int_{s_2} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy = \int_{s_2} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx$$

Par ailleurs on a :

$$\int_{s_1} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx = 0 \;,$$

car l'élément différentiel est nul sur s_1 : il s'y réduit à :

$$\left(U \cos nx - \frac{d\varphi}{dn}\right) ds \;,$$

c'est-à-dire à zéro, éq. (335).

Donc on aura :

$$(350)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{s_2}\left(\mathrm{U} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy &= \int_{s_1+s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx + \left(\mathrm{U} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy \\ &= \int_{s_1+s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy = -\int_{s_1+s_2} d\psi\,. \end{aligned}\right.$$

La dernière intégrale ne change pas si l'on intègre, sur une circonférence de centre o et de très grand rayon, au lieu d'intégrer sur le contour fermé $s_1 + s_2$. Aux grandes distances, le développement de $\dfrac{df}{dz}$ est de la forme

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\alpha + i\beta}{z} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

d'où, en posant $z = r\,e^{i\theta}$,

$$(351)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\alpha \sin\theta - \beta \cos\theta}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}\right.$$

ce qui permet immédiatement de voir que l'intégrale (350) a pour valeur $-2\pi\alpha$. Moyennant quoi on a la formule :

$$(352)\qquad \mathrm{P}_x = 2\pi\rho\alpha\mathrm{U} + \frac{\rho}{2}\int_{s_2}\left[\mathrm{U}^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dy\,.$$

Expression de P_y. — En se reportant à (337), il vient :

$$\mathrm{P}_y = r_y - \rho\,\mathrm{U}\int_{s_1+s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\rho}{2}\int_{s_2}\left[\mathrm{U}^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dy\,,$$

avec r_y donné par (348) sous la forme

$$r_y = -\rho\,\mathrm{U}\int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy = -\rho\,\mathrm{U}\int_{s_1+s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy\,,$$

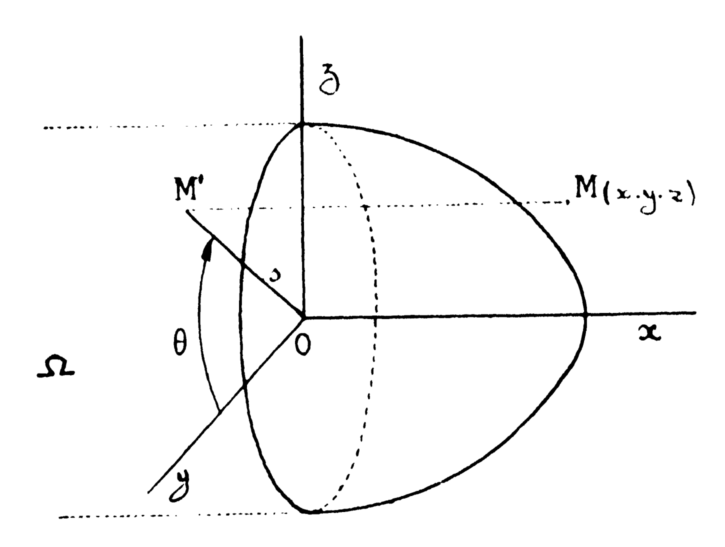
puisque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ sur s_2. Les deux premiers termes de P_y valent donc :

$$-\rho\,\mathrm{U}\int_{s_1+s_2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy\right),$$

où le coefficient de $-\rho U$ représente la *circulation* autour du cylindre ; elle peut être évaluée aisément en utilisant les formules (351), et l'on trouve pour cette circulation la quantité $-2\pi\beta$. D'où finalement :

$$(353) \qquad P_y = 2\pi\rho\beta U + \frac{\rho}{2}\int_{S_1}\left[U^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]dx .$$

Cas du solide de révolution mobile dans la direction de son axe. — Dans ce cas le mouvement permanent obtenu par une translation U parallèle à ox, depuis un temps très long, sera un mouvement symétrique autour de ox, c'est-à-dire que si l'on emploie les coordonnées x, s, θ (où s et θ sont les coordonnées polaires en projection sur $y\,o\,z$)(1), tout se passera de la même façon dans tous les plans $\theta = C^{te}$.



Le potentiel $\varphi\,(x\,y\,z)$ cherché (correspondant à $t = 0$) ne dépendra que de x et s, et l'équation $\Delta\varphi = 0$ prend la forme bien connue :

$$(354) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} = 0 , \\ \text{ou, si l'on veut :} \\ \dfrac{\partial^2 (s\varphi)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial s}\left(s\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 0 . \end{array} \right.$$

(1) Bien entendu, il n'y a pas à confondre la variable actuelle s, avec *l'arc* de la méridienne.

Cas particulier : face arrière plane. — Supposons d'abord que la face arrière S_2 du corps solide, soit plane; c'est, par conséquent, une face circulaire. La condition concernant S_2,

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 ,$$

devient ici :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{sur } S_2).$$

Or, à cause de (354), cette condition prendra la forme :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = 0 \quad (\text{sur } S_2),$$

c'est-à-dire,

$$s \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{Cte} \qquad (\text{sur } S_2).$$

Mais cette constante est nécessairement nulle, sinon, au centre du disque $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ deviendrait infini, et le potentiel ne serait pas régulier; les vitesses v et w données par les formules (330) à l'intérieur du cylindre Ω seraient infinies sur son axe ox (du coté négatif de ox, bien entendu).

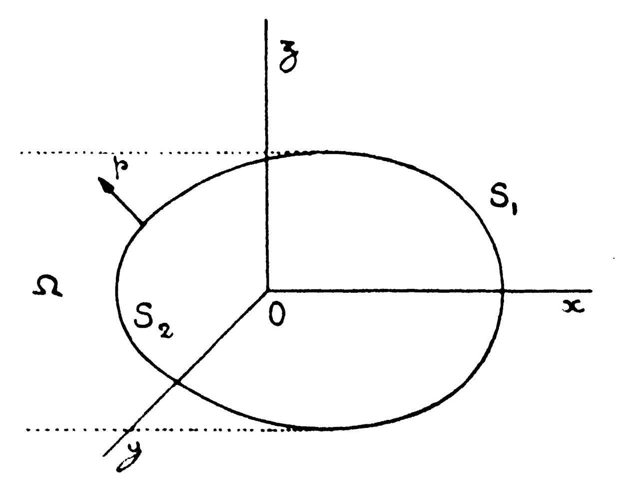
On doit donc avoir :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad (\text{sur } S_2),$$

ou encore :

$$\varphi = \text{Cte} ,$$

et, le potentiel n'étant défini qu'à une constante près, rien n'empêche de prendre



(355) $$\varphi = 0 \quad (\text{sur } S_2).$$

Cas général. — En supposant que S est une surface de révolution d'axe ox, la condition sur S_2 devient, en développant $\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$,

$$(356) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos nx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} \cos ny + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial z} \cos nz = 0 \ (\text{sur } S_2).$$

Mais ici, la normale n est dans le plan méridien qui contient le point (xyz) considéré. Dans ce plan méridien, où les coordonnées rectangulaires sur S_2 sont x et s, la tangente à la méridienne, dont l'équation est $x = x(s)$, est dirigée par dx et ds, la normale n par ds et $-dx$; donc en projection sur $oxyz$, la normale est dirigée par ds, $-\cos\theta \,.\, dx$, $\sin\theta \,.\, dx$, et l'on a :

$$\frac{\cos nx}{-\frac{ds}{dn}} = \frac{\cos ny}{\cos\theta} = \frac{\cos nz}{\sin\theta} .$$

D'autre part, φ est une fonction seulement de x et de s, et l'on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, s)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial s} \frac{y}{s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial s} \cos\theta ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial s} \sin\theta .$$

De sorte que l'équation (356) devient :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial s} \frac{dx}{ds} = 0 .$$

Mais φ étant harmonique vérifie l'équation (354), ce qui permet d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial s} \frac{dx}{ds} = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{ds}\left(s \frac{\partial \varphi(x(s), s)}{\partial s}\right) = 0 ,$$

la dérivée étant prise pour la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ en tant que fonction de

s *sur* la surface S_2 , x étant alors remplacé par sa valeur sur la surface, en fonction de s .

On en tire donc .

$$s \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{Cte} ,$$

et la valeur de cette constante est nécessairement nulle, pour les mêmes raisons que ci-dessus, dans le cas de la face plane à l'arrière.

La condition sur S_2 , dans le cas d'une surface de révolution, est donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad (\text{sur } S_2) . \tag{357}$$

Calcul de la pression totale sur le solide de révolution. — Nous adopterons le même point de vue que pour le cas du cylindre, et nous interprèterons les formules pour le cas des tourbillons négligeables. Alors la pression sera donnée par la formule :

$$p = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] ,$$

c'est-à-dire :

$$(358) \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \rho U \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\rho}{2} \left[\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \right] \quad \text{sur } S_1 ; \\ p_2 = \rho U \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\rho}{2} U^2 = \\ p_1 - \dfrac{\rho}{2} \left[U^2 - \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \text{sur } S_2 . \end{array} \right.$$

Dans la dernière expression de p_2 nous avons tenu compte de la condition (357).

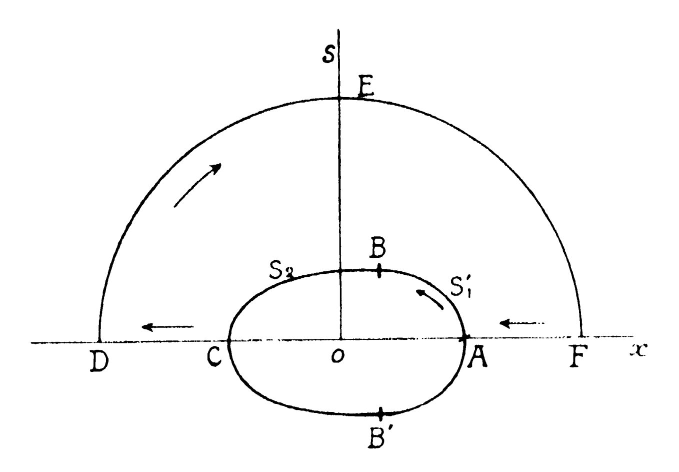
Dans le plan xos , traçons la méridienne du corps, et soient S'_1 et S'_2 les courbes d'intersection des surfaces S_1 et S_2 constituant celui-ci. Soit $d\lambda$ l'élément d'arc de cette méridienne parcourue dans le sens trigonométrique.

Il est clair que, par raison de symétrie, la pression totale sur S est placée suivant ox , et qu'elle n'a qu'une composante, dont la valeur est

$$P = \int 2 \pi s \, d\lambda \times p \cos nx = \int 2 \pi p \, . \, s \, . \, ds ,$$

'intégration étant étendue à toute la demi-méridienne supérieure.

On peut donc écrire, en désignant par AB et BC les demi-portions de méridiennes indiquées sur la figure,



(359) $$\frac{1}{2\pi}\,P = \int_{ABC} p_1\, s\, ds + \int_{BC} (p_2 - p_1)\, s\, ds\,.$$

Ceci posé, formons l'intégrale suivante :

$$J = \int_{ABCDEFA} p_1\, s\, ds + \rho \int_{ABCDEFA} s\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,ds - \frac{\partial \varphi}{\partial s}\,dx\right)\,.$$

On constate de suite qu'elle est égale à :

$$J = \rho\, U \int_{AB\ldots A} s\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,ds + \frac{\rho}{2}\int_{AB\ldots A} s\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2\right] ds - 2\,s\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial s}\,dx\,.$$

La seconde intégrale qui figure au dernier membre est *nulle*. En effet, si l'on écrit cette expression sous la forme $\frac{\rho}{2}\int a\,ds + b\,dx$, on voit immédiatement que l'on a :

$$\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial x} = -\,2\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial s} + s\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}\right)\right]$$

et cette dernière quantité est nulle à cause de l'équation (354). Il en résulte donc bien — φ étant régulière dans le domaine envisagé — que l'intégrale ci-dessus est nulle, et que J se réduit à :

$$\rho\, U \int_{AB\ldots A} s\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,ds\,.$$

D'autre part φ étant régulière et nulle à l'infini, s'y annule comme $\frac{1}{R}$, et ses dérivées premières comme $\frac{1}{R^2}$. Si donc nous prenons pour D E F une demi-circonférence de très grand rayon,

les intégrales de $\int s\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2\right]ds$, $\int s\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds-\frac{\partial \varphi}{\partial s}dx\right)$ étendues à DEF donneront des contributions qui tendront vers zéro avec $\frac{1}{R}$. En égalant les deux valeurs de J, et négligeant, dès maintenant ces contributions, il restera donc :

$$(360)\quad \begin{aligned} &\int_{ABC} p_1\, s\, ds+\int_{DEF}\rho\, U\frac{\partial \varphi}{\partial x}s\, ds+\rho\int_{ABC} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}\times\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds-\frac{\partial \varphi}{\partial s}dx\right)\\ &=\rho\, U\int_{ABC} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds+\rho\, U\int_{DEF} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds\,. \end{aligned}$$

Ce qui concerne DEF disparaît donc. Puis, sur BC, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial s}=0$; et sur AB on a $\frac{d\varphi}{dn}=U\cos nx$, ou bien :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds-\frac{\partial \varphi}{\partial s}dx=U\, ds\ ;$$

donc l'équation (360) devient :

$$\int_{ABC} p_1\, s\, ds=\rho\, U\int_{ABC} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds-\rho\int_{AB} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,.\,U\, ds-$$
$$\rho\int_{BC} s\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 ds=\rho\, U\int_{BC} s\frac{\partial \varphi}{\partial x}ds-\rho\int_{BC} s\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 ds\,.$$

On a par ailleurs :

$$\int_{BC}(p_2-p_1)\, s\, ds=-\frac{\rho}{2}\int_{BC}\left[U^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]s\, ds\,.$$

Ajoutant ces deux dernières équations, il viendra donc, d'après (359) :

$$(361)\qquad P=-\pi\rho\int_{BC}\left[U-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]^2 s\, ds$$

ou si l'on préfère :

$$P=-\frac{\pi\rho}{2}\int_{s'_1}\left[U^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]s\, ds\,.$$

On remarquera combien cette formule est voisine de la formule (349), dont la démonstration ne diffère d'ailleurs pas essentiellement de celle-ci.

En transformant cette expression exactement comme on l'a fait plus haut pour la formule (349), on mettra, si l'on veut, le résultat sous la forme :

$$(361') \quad \left\{ \begin{aligned} P = & - \pi \rho U \int_{S'_1+S'_2} s \frac{\partial \varphi}{\partial s} dx - s \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds \\ & + \frac{\pi \rho}{2} \int_{S'_2} \left[U^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] s \, ds \ . \end{aligned} \right.$$

Comme on a

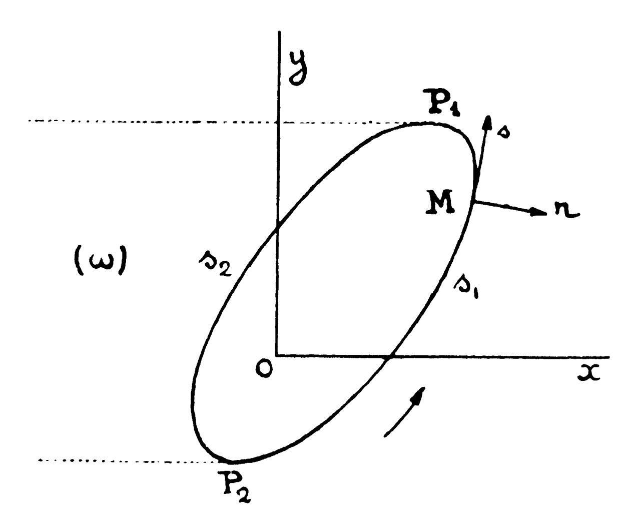
$$\frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \ ,$$

à cause de la condition (354), la première intégrale au second nombre est indépendante du contour, et on pourra la calculer, par exemple, sur une circonférence de très grand rayon, ce qui ne nécessitera l'emploi que du terme de l'ordre de $\frac{1}{r}$, dans le développement éventuel de φ

CHAPITRE XVII

DÉTERMINATION DU POTENTIEL DANS LE CAS DE DEUX DIMENSIONS

Revenons maintenant à la recherche effective de la fonction $\varphi(x\,y\,z)$ à laquelle tout a été ramené. Dans le présent Chapitre nous allons montrer comment M. Zeilon est parvenu à cette détermination dans le cas du mouvement à deux dimensions, cas provenant de la translation d'un cylindre perpendiculairement à ses génératrices.



La question revient alors (éq. 335) à déterminer un potentiel régulier en dehors de $s_1 + s_2$, et tel que :

$$(362)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dn} = \mathrm{U}\cos nx \quad (\text{sur } s_1)\,; \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (\text{sur } s_2)\,; \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad (\text{à l'infini})\,. \end{cases}$$

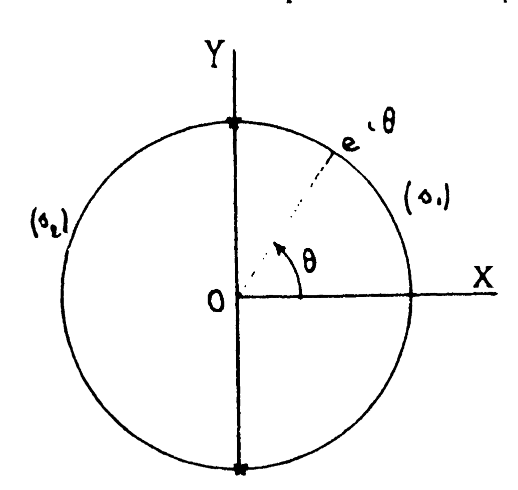
Mais nous avons vu, d'après l'équation (333), que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sont recpectivement la partie réelle et le coefficient de i dans la fonction analytique :

$$(363) \qquad F = i \frac{df}{dz}$$

Nous sommes donc ramené à la recherche d'une fonction analytique $F = A + iB$, définie et régulière, en dehors du contour $s_1 + s_2$, et qui vérifie les conditions

$$(364) \quad \begin{cases} A \cos ny + B \cos nx = U \cos nx & (\text{sur } s_1)\,; \\ A = 0 & (\text{sur } s_2)\,; \\ A = B = 0 & (\text{à l'infini})\,. \end{cases}$$

Opérons une nouvelle transformation conforme qui remplace la frontière de notre domaine, par une circonférence de rayon un, la demi-circonférence de droite correspondant à s_1 et celle de gauche



à s_2. Nous savons alors que cela est possible en général (cf. Chapitre IV). Soit $Z = X + iY$, la nouvelle variable complexe correspondant au nouveau plan. Tout revient alors à trouver, dans ce plan, une fonction analytique régulière au dehors du cercle $F = A + iB$, et satisfaisant *sur* la circonférence (où l'on a $Z = e^{i\theta}$) à la relation suivante :

$$(364') \qquad a(\theta)\, A(\theta) + b(\theta)\, B(\theta) = c(\theta)\,,$$

où les coefficients a, b, c ont les valeurs ci-dessous, provenant des équations (364) à la suite de la transformation conforme effectuée

$$(365)\quad \left\{\begin{array}{ll} a(\theta) = \cos ny & \\ b(\theta) = \cos nx & \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2} \; ; \\ c(\theta) = U \cos nx & \\ a(\theta) = 1 & \\ b(\theta) = 0 & \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \; ; \\ c(\theta) = 0 & \end{array}\right.$$

en faisant varier θ, par exemple de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{3\pi}{2}$. Toutes les fonctions de θ qui interviennent ici ont, naturellement, la période 2π.

Ces données sont discontinues, car, même dans le cas où la tangente à la paroi du cylindre varie d'une façon continue (y compris au passage par les points P_1 et P_2 de séparation des deux régions avant et arrière), la fonction $a(\theta)$ n'en est pas moins discontinue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, où elle passe de la valeur -1 (à l'avant) à la valeur $+1$ (à l'arrière). Cependant cette circonstance n'empêche pas l'application de la méthode que M. Hilbert à donnée pour la résolution de l'équation (364) quand ses coefficients sont continus.

Bien entendu, à la condition exprimée par (364) il faudra adjoindre la condition à l'infini, c'est-à-dire :

$$(366)\qquad F(Z_0) = 0 \, ,$$

Z_0 étant le point du plan Z qui correspond à $z = \infty$ dans la représentation conforme.

Commençons par rappeler un résultat déjà démontré.

Nous avons vu au Chapitre II (formule (6), que l'équation :

$$(367)\qquad \mathcal{F}_1(Z') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_1(\theta')\,\frac{1 + Z' e^{-i\theta'}}{1 - Z' e^{-i\theta'}}\,d\theta' \quad (^1),$$

définissait un fonction analytique régulière à *l'intérieur* du cercle C $(|Z'| < 1)$, et telle que sa partie fût égale, sur C, $(Z' = e^{i\theta'})$, à $\Phi(\theta')$. En posant $Z' = \frac{1}{Z}$, nous passerons à *l'extérieur* du cercle C, et la fonction

(1) Dans cette équation, comme dans les suivantes, nous faisons abstraction de la constante, ici imaginaire pure, qu'on peut toujours ajouter à F_1

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_1(\theta') \frac{Z + e^{-i\theta'}}{Z - e^{-i\theta'}} d\theta' \quad ,$$

sera définie à l'extérieur de C, et sa sa partie réelle prendra, sur C, la valeur $\Phi_1(\theta')$ au point $e^{-i\theta'}$

Changeons θ' en θ, posons $\Phi(\theta) = \Phi_1(-\theta)$, et décalons de 2π l'intervalle d'intégration, ce qui est sans importance puisque $\Phi(\theta)$ admet par définition la période 2π ; nous obtenons la fonction :

(368) $$\mathcal{F}(Z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \frac{1 + Z e^{-i\theta}}{1 - Z e^{-i\theta}} d\theta \quad ,$$

qui, définie pour $|Z| < 1$, possède une partie réelle égale à $\Phi(\theta)$ pour $Z = e^{i\theta}$.

En multipliant par i il est clair que la fonction :

(369) $$\mathcal{G}(Z) = \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta) \frac{1 + Z e^{-i\theta}}{1 - Z e^{-i\theta}} d\theta$$

est définie pour $|Z| > 1$, et que sa partie imaginaire est égale à $i\,\delta(\theta)$ pour $Z = e^{i\theta}$.

En appelant $\gamma(\theta) + i\,\delta(\theta)$ la valeur de cette fonction $\mathcal{G}(Z)$ pour $Z = e^{i\theta}$, la partie réelle $\gamma(\theta)$ s'obtient en écrivant d'abord :

$$\mathcal{G}(Z) = -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\delta(\theta') - \delta(\theta)] \frac{1 + Z e^{-i\theta'}}{1 - Z e^{-i\theta'}} d\theta'$$
$$- \frac{i}{2\pi}\delta(\theta)\int_0^{2\pi} \frac{1 + Z e^{-i\theta'}}{1 - Z e^{-i\theta'}} d\theta' \quad ,$$

puis en faisant tendre le point Z vers $e^{i\theta}$. On a ainsi :

(370) $$\gamma(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\delta(\theta') - \delta(\theta)] \operatorname{cotg}\frac{\theta - \theta'}{2} d\theta' \quad .$$

C'est encore, si l'on veut, la *valeur principale*, au sens de Cauchy, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta') \operatorname{cotg}\frac{\theta - \theta'}{2} d\theta'$$

Cela étant, nous allons commencer par résoudre, non pas le problème correpondant à l'équation (364), mais à cette équation sans second membre,

(371) $$a(\theta)\,A(\theta) + b(\theta)\,B(\theta) = 0$$

A cet effet, formons, tout d'abord, une fonction analytique régulière hors de C , et dont la partie imaginaire soit, sur C , égale à la quantité (imaginaire pure) :

$$(372) \qquad i\,\delta(\theta) = -\frac{1}{2}\log\frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)} = i \operatorname{arc\,tg}\frac{b(\theta)}{a(\theta)} \quad .$$

Nous n'avons qu'à porter cette valeur de $\delta(\theta)$ dans les formules (369) et (370) pour avoir la fonction demandée, et sa partie réelle $\gamma(\theta)$ sur C .

Les fonctions $\delta(\theta)$, $\mathfrak{G}(Z)$ et $\gamma(\theta)$ *étant ainsi choisies*, considérons la fonction

$$(373) \qquad \Gamma(Z) = e^{\mathfrak{G}(Z)} \, .$$

Cette fonction prendra, sur $C\,(Z = e^{i\theta})$, les valeurs suivantes :

$$e^{\gamma(\theta) - \frac{1}{2}\log\frac{a-ib}{a+ib}} = e^{\gamma}\sqrt{\frac{a+ib}{a-ib}} = \frac{e^{\gamma}(a+ib)}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad .$$

Il en résulte immédiatement que la fonction $i\,\Gamma(Z) = A_0 + i\,B_0$ satisfait sur C à la relation

$$a\,A_0 + b\,B_0 = 0$$

c'est-à-dire que $i\,\Gamma(Z)$ est une solution pour l'équation (371).

Cette solution n'est, du reste, pas unique ; il est clair, en effet, qu'on en obtiendra une infinité d'autres, en multipliant celle-ci par une fonction H (Z) ayant la propriété d'être *réelle* sur toute la circonférence C . Si cette fonction H (Z) était assujettie à être continue sur sur tout le contour C , il est bien connu et évident que sa partie imaginaire étant toujours nulle sur C , H (Z) se réduirait à une constante réelle. Mais cette conclusion n'est plus valable s'il y a quelque discontinuité ; or nous devons nous attendre justement à une discontinuité au point $Z = -i$ qui correspond à P_2 . En admettant que ce soit le seul point de discontinuité, cette circonstance rend naturelle l'introduction de la variable

$$(374) \qquad \zeta = i\,\frac{Z - i}{Z + i} \quad ,$$

l'équation qu'on vient d'écrire effectuant la représentation conforme de l'aire extérieure à C sur le demi-plan ζ supérieur, la circonférence C correspondant à *l'axe réel* du plan ζ .

On voit alors qu'il suffit, dans ce cas, de prendre pour $K(\zeta)$

une fonction, à coefficients réels, de la combinaison ζ , pour que la fonction de Z

$$H(Z) = K\left(i\,\frac{Z-i}{Z+i}\right)$$

soit réelle sur la circonférence C . On choisira $K(\zeta)$ régulière et définie dans tout le demi-plan supérieur.

La fonction $i\,\Gamma(Z) \times H(Z)$, devenue alors

(375) $$i\,\Gamma(Z)\,.\,K\left(i\,\frac{Z-i}{Z+i}\right)$$

est donc une fonction correspondant à l'équation (371). Nous verrons un peu plus loin de quel secours va nous être la fonction arbitraire H , ou la fonction K , s'il y a lieu.

Pour le moment, envisageons la fonction particulière $i\,\Gamma(Z)$, définie plus haut, et appelons $A_0(\theta) + i\,B_0(\theta)$ ses valeurs sur C . On a, d'après les calculs antérieurs :

$$A_0(\theta) = -\frac{e^{\tau}\,.\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad B_0(\theta) = \frac{e^{\tau}\,.\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Construisons alors une fonction $L(Z)$ régulière hors de C , et dont la partie réelle soit égale, sur C , à l'expression

(376) $$\lambda(\theta) = \frac{-\,c(\theta)\,A_0(\theta)}{b(\theta)\,[A_0^2(\theta) + B_0^2(\theta)]} = \frac{+\,c(\theta)\,e^{-\tau(\theta)}}{\sqrt{a^2(\theta)+b^2(\theta)}}\,.$$

D'après la formule (368), on peut prendre pour $L(Z)$:

(377) $$L(Z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c(\theta)\,e^{-\tau(\theta)}}{\sqrt{a^2(\theta)+b^2(\theta)}}\;\frac{1+Z\,e^{-i\theta}}{1-Z\,e^{-i\theta}}\,d\theta\,,$$

et sur C , $L(Z)$ sera égal à $\lambda(\theta) + i\,\mu(\theta)$, avec

(378) $$\mu(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\lambda(\theta') - \lambda(\theta)]\,\mathrm{Cotg}\,\frac{\theta-\theta'}{2}\,d\theta'\,,$$

cette dernière équation s'obtenant comme l'équation (370).

Si nous posons enfin

(379) $$F_1 = \Gamma(Z) \times L(Z) = A_1 + i\,B_1\,,$$

nous voyons que cette fonction prend sur C les valeurs :

$$A_1(\theta) + i\,B_1(\theta) = \frac{e^{\tau}(a + i\,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}(\lambda + i\,\mu)$$

$$= \frac{e\,(a + i\,b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left[\frac{c\,e^{-\tau}}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\mu\right].$$

On a donc :

$$A_1(\theta) = \frac{a\,c}{a^2 + b^2} - \frac{b\,\mu\,e^{\tau}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$B_1(\theta) = \frac{b\,c}{a^2 + b^2} + \frac{a\,\mu\,e^{\tau}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

et, par suite,

$$a\,A_1 + b\,B_1 = c \quad , \quad \text{sur} \quad C\,.$$

La fonction $F_1(Z)$ définie par (379), satisfait donc à l'équation, avec second membre, (364). Et comme la fonction $i\,\Gamma\,H$, nous l'avons vu, vérifie l'équation sans second membre (371), il en résulte que la relation

$$(380) \qquad F(Z) = F_1 + i\,\Gamma\,H = \Gamma(Z)\,\{\,L(Z) + i\,H(Z)\,\}$$

définit une fonction analytique $F(Z)$ répondant à la condition donnée (264), dès que $H(Z)$ satisfait à la restriction d'être réelle sur la circonférence C.

Détermination de la fonction H (Z), lorsque le contour $s_1 + s_2$ du solide est régulier en P_1 et P_2. — Supposons que le contour $s_1 + s_2$ de la section droite du cylindre, soit régulièr en P_1 et P_2 ; nous entendons par là que la tangente varie d'une façon continue quand on passe par P_1 ou P_2 en décrivant le contour fermé. Nous supposerons également que la tangente varie d'une façon continue sur tout le contour $s_1 + s_2$. Dans ces conditions, les fonctions $b(\theta)$ et $c(\theta)$ définies par (365) sont continues partout, mais elles possèdent un point (et un seul) de discontinuité pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (mod. 2π).

Examinons d'un peu près, dans cette hypothèse, la discontinuité correspondante pour la fonction $\mathcal{G}(Z)$ définie par (369) (372). La valeur de $\delta(\theta)$ peut s'écrire :

$$\delta(\theta) = -\frac{1}{2i}\log\left[-\frac{b + a\,i}{b - a\,i}\right] = -\frac{1}{2i}\left[-i\,\pi + 2\,i\,\text{arc tg}\,\frac{a}{b}\right].$$

Nous choisissons $-i\pi$ pour détermination de $\log(-1)$, et nous prenons pour $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ la détermination qui, lorsqu'on arrive au point P_1 par l'avant (où $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ vaut $\operatorname{arc\,tg} \frac{\cos ny}{\cos nx}$), tend vers $\frac{\pi}{2}$. On a ainsi :

$$\begin{cases} \delta(\theta) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} & (\text{sur } s_1), \\ \delta(\theta) = 0 & (\text{sur } s_2). \end{cases}$$

Quand le point $Z = e^{i\theta}$ passe par $Z = -i$ en parcourant C dans le sens positif, on a

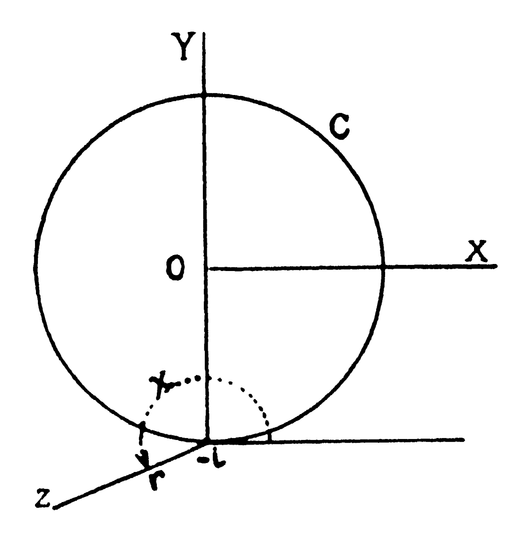
$$\delta\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos ny}{\cos nx},$$

ce qui tend vers π, car $\cos ny$ devient -1, et $\cos nx$ tend vers zéro positivement. Donc la discontinuité est égale à

$$\delta\left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) - \delta\left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi .$$

C'est justement cette discontinuité qu'on rencontre dans la fonction $\log(Z+i)$, considérée à l'extérieur du cercle C au voisinage de $Z = -i$; on a alors (voir la *figure*) :

$$\log(Z+i) = \log r + i\chi ,$$



χ étant l'angle du vecteur r avec la direction OX. Quand on tourne autour du point $Z = -i$ pour passer, sur la circonférence C, de la gauche vers la droite de ce point, en restant dans la région

extérieure au cercle, l'angle χ augmente visiblement de π. D'autre part, lorsque le point Z est sur la circonférence, $Z = e^{\theta i}$, et l'on a élémentairement :

$$r = 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| .$$

Il résulte de là que, si nous considérons la différence,

(381) $$\mathcal{G}_1(Z) = \mathcal{G}(Z) - \log(Z + i) ,$$

cette différence pourra être exprimée par une intégrale analogue à (369) avec cette seule modification, qu'il faudra mettre, à la place de $\delta(\theta)$, la combinaison $\delta(\theta) - \chi(\theta)$, laquelle reste continue pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Par suite, $\mathcal{G}_1(Z)$ est continue au voisinage du point $Z = -i$. Donc on a pour la partie réelle $\gamma(\theta)$ de $\mathcal{G}(e^{i\theta})$,

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \log 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| ,$$

$\gamma_1(\theta)$ étant continu pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$. On en conclut que

$$e^{\gamma(\theta)} = e^{\gamma_1(\theta)} \times 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|$$

s'annule (zéro simple) en ce point, et que $e^{-\gamma(\theta)}$ y devient infini (pôle simple).

D'ailleurs ce résultat était en évidence aussi bien sur la formule (381) qu'on peut écrire

$$e^{\mathcal{G}(z)} = e^{\mathcal{G}_1(z)} \times (Z + i) ,$$

formule qui montre immédiatement l'existence du zéro simple, déjà indiqué pour $e^{\mathcal{G}(z)}$.

Si nous revenons maintenant à la détermination de $F(Z)$ par la formule (380), on voit que la fonction $H(Z)$ restée arbitraire, ne pourra avoir qu'un seul pôle (simple du reste) à savoir $Z = -i$, puisque c'est la seule singularité qui puisse disparaître dans la multiplication par $\Gamma(Z)$ ($= e^{\mathcal{G}(z)}$). On devra donc prendre pour $H(Z)$ une fonction, à coefficients réels, de la quantité ζ déjà introduite (f. 374) $\zeta = i\,\frac{Z - i}{Z + i}$, et une telle fonction, n'ayant dans tout le demi-plan ζ supérieur, aucune singularité, n'ayant qu'un pôle

$Z = -i$ en tant que fonction de Z, est nécessairement de la forme

$$H(Z) = \lambda_0 + i\lambda_1 \frac{Z-i}{Z+i},$$

λ_0 et λ_1 étant deux constantes réelles.

Il vient donc finalement pour F (Z), en portant dans (380),

$$(382) \qquad F(Z) = \Gamma(Z) \left\{ L(Z) + i\lambda_0 - \lambda_1 \frac{Z-i}{Z+i} \right\}$$

Cette fonction satisfait aux conditions aux parois, conditions incluses dans (364), mais elle doit satisfaire encore à la condition à l'infini, c'est-à-dire à (366). Cette condition, où Z_0 désigne le point du plan Z qui correspond à $z = \infty$, est équivalente à

$$(383) \qquad L(Z_0) + i\lambda_0 - \lambda_1 \frac{Z_0 - i}{Z_0 + i} = 0 .$$

Elle équivaut à *deux* équations à coefficients réels, lesquelles équations déterminent évidemment λ_0 et λ_1, coefficients restés inconnus, par des formules du premier degré.

La fonction F (Z) est alors complètement calculée.

La fonction φ en résulte par l'intermédiaire de f, laquelle est définie par l'équation (363) :

$$\frac{df}{dz} = -i F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Le développement de F (Z) au voisinage de $Z = Z_0$ ne comportant pas de terme constant d'après (383), on voit que pour z infini, on aura pour $\frac{df}{dz}$ un développement de la forme

$$(384) \qquad \frac{df}{dz} = -iF = \frac{\alpha + i\beta}{z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

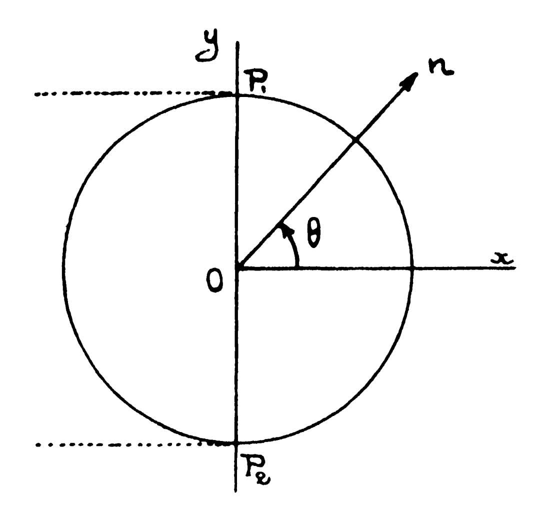
On voit donc que, dans la région extérieure à ω (région arrière) la vitesse (u , v) s'annulera à l'infini comme $\frac{1}{|z|}$: c'est ce que nous avions déjà énoncé à propos des formules (351).

Application au cylindre circulaire. — Appliquons la méthode décrite ci-dessus, au cas où la section du cylindre est un cercle, dont

on peut, évidemment, prendre le rayon pour unité. Dans ce cas, les deux plans z et Z coïncideront, et l'on aura, sur l'avant du corps $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$a(\theta) = \sin\theta \quad , \quad b(\theta) = \cos\theta \quad , \quad c(\theta) = U\cos\theta \quad .$$

Formons alors les fonctions $\mathcal{G}$, Γ, L, dont nous avons besoin. La formule (372) nous donne d'abord



$$\delta(\theta) = \frac{i}{2}\log\frac{\sin\theta - i\cos\theta}{\sin\theta + i\cos\theta} \quad \text{à } l'avant,$$

$$\text{et} \quad \delta(\theta) = 0 \quad \text{à } l'arrière,$$

c'est-à-dire, pour l'avant :

$$\delta(\theta) = \frac{i}{2}\log(-e^{2i\theta}) = \frac{i}{2}(-i\pi + 2i\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad ,$$

en choisissant la détermination du logarithme, qui conserve la continuité de δ au point $Z = i$, — la discontinuité étant placée au point $Z = -i$.

On conclut de là (formule 369)

$$(385) \qquad \mathcal{G}(z) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\frac{1 + z\,e^{-i\theta}}{1 - z\,e^{-i\theta}}\,d\theta \ .$$

Nous avons ensuite besoin de connaitre la partie réelle $\gamma(\theta)$, de $\mathcal{G}(e^{i\theta})$; celle-ci, nous l'avons vu, est la valeur principale de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)\operatorname{cotg}\frac{\theta - \theta'}{2}\,d\theta' \ ,$$

en nous plaçant dans le cas, le seul intéressant par la suite, où θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La valeur principale de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta'}{2}\, d\theta'$$

étant égale à

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta'-\varepsilon} + \int_{\theta'+\varepsilon}^{+\frac{\pi}{2}} \right] = \Big\{ -2 \log \left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right| \Big\}_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta'-\varepsilon}$$

$$+ \Big\{ -2 \log \left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right| \Big\}_{\theta'+\varepsilon}^{+\frac{\pi}{2}} = 2 \log \left| \operatorname{cotg} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| ,$$

il vient :

$$\gamma(\theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\pi} \right) \log \left| \operatorname{cotg} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\theta - \theta') \operatorname{cotg} \frac{\theta-\theta'}{2}\, d\theta ,$$

ou encore :

$$(386) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(\theta) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\pi} \right) \log \left| \operatorname{cotg} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \tau \operatorname{cotg} \tau\, d\tau + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \tau \operatorname{cotg} \tau\, d\tau . \end{aligned} \right.$$

Nous devons maintenant former $\lambda(\theta)$, puis $L(z)$ (f. 376 et 377).

Il vient :

$$\lambda(\theta) = U \cos\theta\; e^{-\gamma(\theta)} \quad \text{(à l'avant)},$$

$$\text{et} \quad \lambda(\theta) = 0 \quad \text{(à l'arrière)}.$$

Puis :

$$L(z) = -\frac{U}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma(\theta)} \cos\theta\, \frac{1 + z\, e^{-i\theta}}{1 - z\, e^{-i\theta}}\, d\theta$$

Dans ces conditions la formule (382) nous fera connaître la fonction $F(z)$ qui résout notre problème.

Les nombres réels λ_0 et λ_1 doivent être choisis de façon que $F(z)$ soit nul pour z infini, c'est-à-dire qu'il doit en être ainsi pour la fonction

$$L(z) + i\lambda_0 - \lambda_1 \frac{z-i}{z+i} .$$

Cela donne immédiatement la condition :

$$i\lambda_0 - \lambda_1 + \frac{U}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma(\theta)} \cos\theta \, d\theta = 0$$

D'où

$$\lambda_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = \frac{U}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma(\theta)} \cos d\theta$$

La fonction

$$F(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\varphi}{\partial x} ,$$

prend donc ici la forme suivante :

$$F(z) = -\frac{U}{2\pi} e^{\mathcal{G}(z)} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma(\theta)} \cos\theta \, \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} \, d\theta \right.$$

$$\left. + \frac{z-i}{z+i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma(\theta)} \cos d\theta \right] ,$$

$\mathcal{G}(z)$ et $\gamma(\theta)$ étant les fonctions définies plus haut, par les formules (385) et (386).

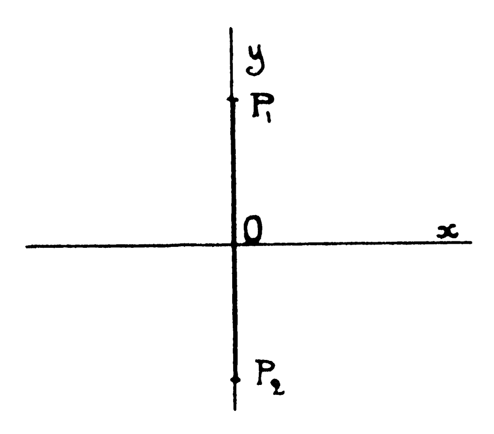
Cette équation faisant connaître partout les dérivées partielles du potentiel φ, permet de connaître la vitesse en tout point des deux régions, avant ou arrière, dans le plan z.

Et en utilisant la formule (349), ou la formule (352), on calculera la résistance P_x, qui est évidemment la résistance totale, pour l'unité de longueur du cylindre.

On trouve ainsi $P_x = \rho U^2 \times 1{,}314$, et rapporté à l'unité d'envergure $P_x = \rho U^2 \times 0{,}657$, car dans notre calcul, l'envergure est égale au diamètre du cylindre, c'est-à-dire à 2. Ce résultat est

beaucoup plus grand que celui qu'indique l'expérience : le rapport du résultat théorique au résultat expérimental, est 1,7 environ, si l'on utilise des expériences correspondant à un diamètre de 7 cm. 5 et à un courant de 20 mètres/seconde environ.

Détermination de la fonction $H(Z)$, lorsque la variation de la tangente est discontinue en P_1 et P_2. — Dans tous les cas où, lorsqu'on passe par P_1 ou P_2 en décrivant le contour fermé toujours dans le même sens, la tangente éprouve une discontinuité brusque au passage de ces points, les calculs développés antérieurement ne sont plus valables, et l'on ne peut plus adopter pour $\mathcal{F}(Z)$ l'expression (382). Il est alors naturel de s'imposer comme condition, propre à déterminer la fonction $H(Z)$ qui intervient dans (380), la condition que *la pression totale ait une valeur finie*. Cette condition se



trouve réalisée justement d'elle-même, dans le cas étudié antérieurement. On constate qu'elle suffit à déterminer le problème du choix de $H(Z)$.

Nous supposerons encore pour le moment que, en dehors des des points P_1 et P_2, la tangente au coutour varie avec continuité : le contour n'a pas de pointes ou de points anguleux, en dehors de ces deux exceptions.

Nous allons exposer le calcul, pour plus de simplicité, sur un exemple, celui où il s'agit d'une lame plane perpendiculaire à la direction de son mouvement de translation. Nous placerons l'origine au milieu du segment $P_1 P_2$ intersection de la lame avec le plan xoy, et nous supposerons $oP_1 = oP_2 = \frac{l}{2}$, l étant la largeur de la lame.

En suivant exactement la méthode générale, nous devons d'abord faire correspondre au plan z, coupé le long de $P_1 P_2$, la surface d'un plan Z coupé par le cercle C $(|Z| = 1)$

Il est évident, et cela résulte aussi sans effort du Chapitre IV, que la transformation demandée est réalisée par l'équation

(387) $$z = \frac{l}{4}\left(Z - \frac{1}{Z}\right) ,$$

pui fait correspondre les deux côtés de la lame aux deux demi circonférences $Z = e^{i\theta}$.

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ pour l'avant,} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \text{ pour l'arrière}\right).$$

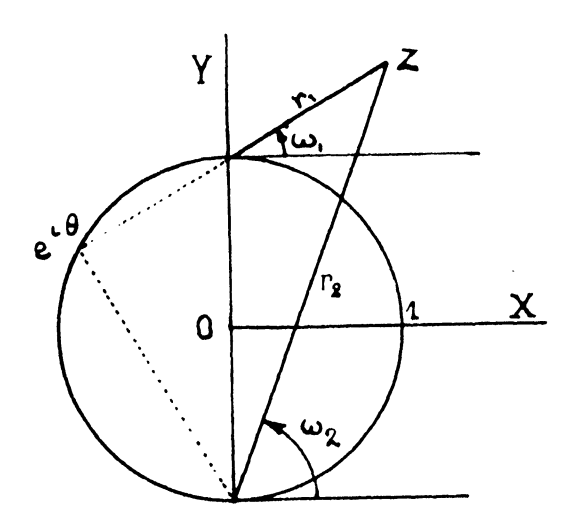
En se reportant aux formules (365), on voit qu'on a actuellement

$$\left|\begin{array}{l} a(\theta) = 0 \\ b(\theta) = 1 \\ c(\theta) = U \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} ,$$

et

$$\left|\begin{array}{l} a(\theta) = 1 \\ b(\theta) = 0 \\ c(\theta) = 0 \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} .$$

Il y a donc discontinuité pour a , b , c , aux points $Z = \pm i$. A cause de (372) on a ici pour $\delta(\theta)$:



$$i\delta = -\frac{1}{2}\log(-1) = \frac{i\pi}{2} \quad \text{à l'avant} ,$$

$$i\delta = 0 \quad \text{à l'arrière} ,$$

c'est-à-dire

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ , ou } 0 \text{ , à l'avant ou à l'arrière.}$$

La fonction $\mathcal{G}(Z)$ correspondant à ces valeurs de δ est, d'après (369),

$$\mathcal{G}(Z) = -\frac{i}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + Z e^{-i\theta}}{1 - Z e^{-i\theta}}\, d\theta ,$$

c'est-à-dire, après un calcul entièrement élémentaire,

$$\mathcal{G}(Z) = \frac{1}{2} \log \frac{1 - iZ}{i - Z} ,$$

ce qui d'ailleurs va se trouver vérifié, *a posteriori*, puisqu'il nous est nécessaire maintenant de connaître les valeurs de $\mathcal{G}(Z)$ sur la circonférence C. Nous écrirons, en utililisant les notations qu'indiquent la *figure* :

$$(388) \qquad \frac{1 - iZ}{i - Z} = i\,\frac{Z + i}{Z - i} = e^{i\frac{\pi}{2}}\,\frac{r_2}{r_1}\, e^{i(\omega_2 - \omega_1)} ,$$

en prenant, par exemple, pour ω_1 et ω_2 les déterminations $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$ pour $Z = 1$, et en suivant par continuité. Nous aurons ainsi :

$$\mathcal{G}(Z) = \frac{1}{2} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \omega_2 - \omega_1\right) .$$

On voit alors que, pour

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} ,$$

on a

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) ,$$

et pour

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} ,$$

$$\omega_2 - \omega_1 = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{r_2}{r_1} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) .$$

Nous vérifions donc, en passant, les valeurs de la partie imaginaire, et nous constatons que la partie réelle de $\mathcal{G}(e^{i\theta})$ est

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{2} \log \left| \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|$$

La formule (376) donne maintenant, en vue de la construction de la fonction $L(Z)$,

$$\lambda(\theta) = c\, e^{-\tau} = \frac{U}{\sqrt{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}} \quad \text{(à l'avant).}$$

La fonction $L(Z)$ est telle que sa partie réelle soit, sur C, égale à $\lambda(\theta)$. Cette fonction résulte de la formule (377), mais le calcul est inutile ; car, d'après ce qui précède, la fonction $\Gamma(Z) = e^{\mathfrak{G}(Z)}$ prend sur C les valeurs

$$i\sqrt{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \text{ à l'avant et } \sqrt{\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|} \text{ à l'arrière.}$$

La fonction $L(Z)$ que nous cherchons est donc visiblement :

$$L(Z) = i\,U\, e^{-\mathfrak{G}(Z)} = i\,U\sqrt{\frac{i - Z}{1 - i\,Z}},$$

en conservant pour la détermination de $\mathfrak{G}(Z)$ celle qui a été précisée plus haut.

La formule (380) nous donne alors :

$$F(Z) = e^{\mathfrak{G}(Z)}\left[i\,U\, e^{-\mathfrak{G}(Z)} + i\,H(Z)\right] = i\,U + i\sqrt{\frac{1 - i\,Z}{i - Z}}\; H(Z)\,.$$

Remarquons, du reste, que le calcul de $L(Z)$ pouvait être évité, en observant que $F = i\,U$ était une solution évidente du problème concernant F (quand on fait abstraction des conditions à l'infini).

Quoi qu'il en soit, il nous faut maintenant définir $H(Z)$: c'est une fonction qui doit être régulière dans tout le domaine extérieur à C, être réelle sur C, et elle ne peut posséder d'autres points singuliers que $Z = \pm i$; elle sera de la forme :

$$H(Z) = \lambda_0 + i\,\lambda_1 \frac{Z - i}{Z + i} + i\,\lambda_2 \frac{Z + i}{Z - i} + \ldots ;$$

les λ étant tous réels, et les termes éventuels non écrits étant des puissances de $\dfrac{Z + i}{Z - i}$ ou de son inverse. Il vient donc :

$$F(Z) = i\,U + \sqrt{\frac{1 - i\,Z}{i - Z}}\left[i\,\lambda_0 - \lambda_1 \frac{Z - i}{Z + i} - \lambda_2 \frac{Z + i}{Z - i} + \ldots\right]$$

Voyons à quoi nous entraîne la condition que la *pression totale soit finie*. Cette pression est fournie par la formule (349)

$$P_x = -\frac{\rho}{2}\int_{s_2}\left(U - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dy\ .$$

Or, à l'arrière, sur s_2,

$$\sqrt{\frac{1-iZ}{i-Z}} \quad \text{est égal à} \quad \sqrt{\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

$$\frac{Z-i}{Z+i}\ , \quad \text{à} \quad e^{i\frac{\pi}{2}}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

$$\text{et} \quad \frac{Z+i}{Z-i}\ , \quad \text{à} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}}\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

On a donc, sur s_2 :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{s_2} = U + \sqrt{\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|}\times$$

$$\left\{\lambda_0 + \lambda_2\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| - \lambda_1\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| + \dots\right\}$$

D'autre part, la relation (387) entre z et Z donne, sur s_2 :

$$y = \frac{\varepsilon l}{2}\sin\theta\ ,$$

donc

$$P_x = -\frac{\rho l}{4}\int_{s_2}\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|\times$$

$$\left\{\lambda_0 + \lambda_2\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| - \lambda_1\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| + \dots\right\}^2\cos\theta\, d\theta$$

Pour les points extrêmes, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ tout d'abord, $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ devient infini comme $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$, pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$ c'est $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ qui devient infini comme $\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)^{-1}$. Mais $\cos\theta$ s'annule dans les deux cas, comme $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ ou comme

$\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$. On voit donc que P_x ne pourra être fini que si λ_2 et tous les coefficients suivants sont *nuls*. Il reste donc :

$$F(Z) = i\,U + \sqrt{\frac{1 - i\,Z}{i - Z}}\left[i\,\lambda_0 - \lambda_1 \frac{Z - i}{Z + i}\right].$$

avec seulement deux coefficients inconnus, λ_0 et λ_1.

Nous définirons ces deux derniers coefficients, en écrivant les *conditions à l'infini.*

Les vitesses doivent être nulles pour z infini, c'est-à-dire, d'après (387) pour Z infini. La relation (388) nous montre qu'alors, on a

$$\sqrt{\frac{1 - i\,Z}{i - Z}} = e^{\frac{i\pi}{4}}\ ;$$

on doit donc avoir :

$$i\,U + e^{\frac{i\pi}{4}}(i\,\lambda_0 - \lambda_1) = 0\quad ,$$

ce qui donne immédiatement

$$\lambda_0 = -\,U \cos\frac{\pi}{4} = -\,\frac{U}{\sqrt{2}}\quad ,\quad \lambda_1 = U \sin\frac{\pi}{4} = \frac{U}{\sqrt{2}}\ .$$

La formule qui donne P_x (c'est-à-dire la pression totale elle-même, car P_y est évidemment nulle), devient alors :

$$P_x = -\,\frac{\rho\,U^2\,l}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \times$$

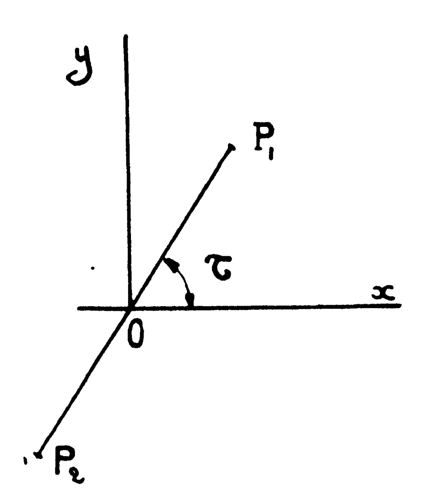
$$\left\{1 + \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|\right\}^2 \cos\theta\,d\theta\quad ,$$

c'est-à-dire :

$$P_x = \frac{\rho\,U^2\,l}{8}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - \frac{2}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{\rho\,U^2\,l}{4}(2 + \pi)$$

La largeur de la lame étant l, la théorie des sillages fournissait (cf. Chap. VII) pour la résistance rapportée à l'unité de

longueur, le nombre $\rho U^2 \dfrac{\pi}{4+\pi}$; nous trouvons, par la théorie actuelle, $\rho U^2 \dfrac{2+\pi}{4}$, quantité notablement plus *grande* (coefficient 1,28, au lieu de 0,44).



Le cas d'une lame $P_1 P_2$ *inclinée* d'un angle donné τ sur ox , se laisse traiter sans difficulté, d'une façon tout à fait analogue à celle qui vient d'être développée pour le cas de la lame normale à ox .

Par ce procédé, ou par celui qu'on trouvera dans le Mémoire de M. N. Zeilon, on parvient à l'expression suivante pour la fonction

$$F = i\,\frac{df}{dz}\left(= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) :$$

$$F = i\,U\left[\,1 + e^{-i\tau}\left(-\cos\frac{\tau}{2}\,\zeta^{\frac{\tau}{\pi}} + \sin\frac{\tau}{2}\,\zeta^{\frac{\tau}{\pi}-1}\right)\right] ,$$

ζ désignant une variable liée à z par l'équation

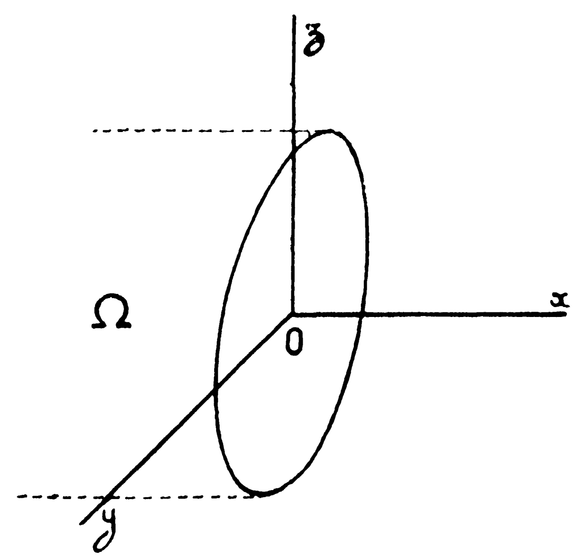
$$\frac{4z}{l} = e^{i\tau}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} .$$

Cette transformation est telle que les deux côtés de la plaque $P_1 P_2$ correspondent aux deux demi-axes sur l'axe réel du plan ζ , la face avant étant représentée sur le demi-axe positif.

CHAPITRE XVIII

DÉTERMINATION DU POTENTIEL φ DANS LE CAS DE TROIS DIMENSIONS. LE DISQUE CIRCULAIRE PLAN, EN TRANSLATION PARALLÈLEMENT A SON AXE

Nous allons maintenant examiner le problème, beaucoup plus important, où l'on envisage le cas de trois dimensions. Nous nous plaçerons dans l'hypothèse où le corps solide est de révolution autour de Ox (axe parallèle à la translation). Et dans le présent chapitre, nous examinerons l'exemple simple mais essentiel, du *disque circulaire* plan.



Soit a le rayon du disque. Les conditions aux limites sont ici, en plaçant l'origine au centre du disque :

(389) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = U & \text{à l'}\textit{avant}\text{ du disque} \quad (x = 0) \\ \varphi = 0 & \text{à l'}\textit{arrière}\quad \text{(équation 355)} \end{cases}$$

(390) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{à l'infini.}$$

Nous reconnaissons immédiatement que la fonction harmonique Ux satisfait aux conditions (389), mais elle ne satisfait pas aux conditions (390) à l'infini. Nous sommes ainsi amenés à poser :

$$\Phi = \varphi - Ux \ ,$$

et à rechercher un potentiel Φ tel que :

(391) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{à l'}\textit{avant}\text{ du disque}$$

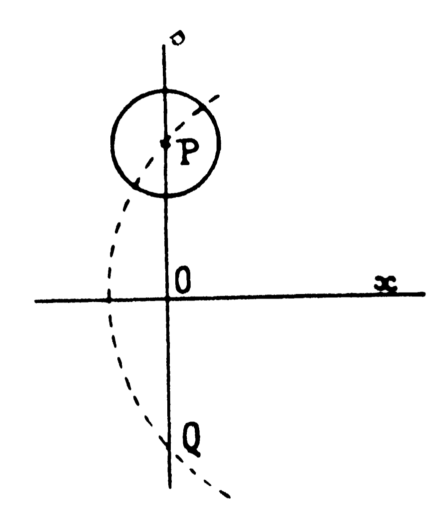
(392) $$\Phi = 0 \quad \text{à l'}\textit{arrière}$$

(393) $$\Phi = -Ux + C' + \frac{A}{r} + \dots \text{ à l'infini.}$$

(r désigne la distance du point M (x, y, z) à l'origine).

Pour résoudre ce problème de fonctions harmoniques, il nous sera commode de passer en coordonnées toroïdales, la circonférence du disque jouant le rôle de circonférence de base dans la définition des nouvelles coordonnées.

Tout étant symétrique autour de Ox, occupons-nous d'abord d'un plan méridien xos passant par Ox. Dans ce plan, marquons le segment PQ ($|s| \leq a$) qui correspond à l'intersec-



tion avec le disque; et envisageons la famille des circonférences qui passent par P et Q, et la famille orthogonale; leurs équations seront respectivement :

(394) $$\left\{ \begin{aligned} x^2 + s^2 - a^2 &= 2 \lambda a x \\ x^2 + s^2 + a^2 &= 2 \mu a s. \end{aligned} \right.$$

Il est aisé de tirer de là x et s en fonction de λ et μ. D'abord on a :

(395) $$\mu s - \lambda x = a \quad ,$$

puis en éliminant x, on trouve une équation en s, qui se me facilement sous la forme :

(396) $$(1 + \lambda^2)(a - \mu s)^2 - s^2 \lambda^2 (\mu^2 - 1) = 0.$$

En vue d'éviter la présence des radicaux $\sqrt{1 + \lambda^2}$ et $\sqrt{\mu^2 - 1}$, il est tout indiqué de faire un changement de notations, et de poser :

(397) $$\begin{cases} \lambda = - \operatorname{cotg} \alpha \\ \mu = \operatorname{coth} \beta. \end{cases}$$

L'équation (396) donne alors immédiatement :

$$s = \frac{a\, Sh\, \beta}{Ch\, \beta \pm \cos \alpha}.$$

Il suffit évidemment de prendre l'un des signes, puisqu'on passe d'un signe à l'autre en changeant simplement α en $\pi + \alpha$, ce qui ne modifie pas les formules (397). Nous choisirons le signe $+$, et nous écrirons :

(398) $$s = \frac{a\, Sh\, \beta}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha},$$

d'où nous déduirons, par (395),

(399) $$x = \frac{a \sin \alpha}{Ch\, \beta + \cos \alpha}$$

En passant dans l'espace, et adoptant les coordonnées semi-polaires : x, s, γ, γ représentant l'angle polaire en projection sur yoz, on voit que nous exprimerons ces coordonnées en fonction de (α, β, γ) : ces trois derniers paramètres sont les *coordonnées toroïdales*. Les surfaces $\alpha = \text{Cte}$ sont des sphères contenant la circonférence du disque donné ; les surfaces $\beta = \text{Cte}$ sont des tores d'axe Ox ; les surfaces $\gamma = \text{Cte}$ sont les méridiens passant par Ox. Ceci explique aisément le nom donné à ces cordonnées spéciales.

Comme on a :

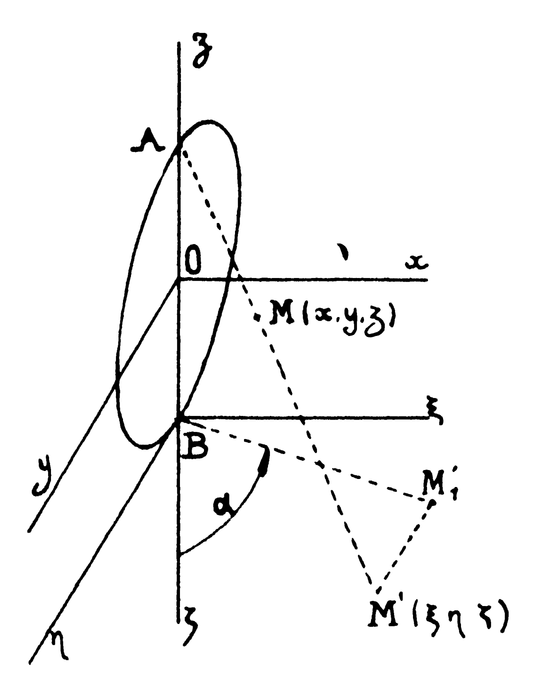
$$r^2 = x^2 + s^2 ,$$

les formules (394) nous donnent de suite :

$$(400) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 - a^2 &= - \frac{2\,a^2 \cos \alpha}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}, \\ r^2 + a^2 &= \frac{2\,a^2 \operatorname{Ch} \beta}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}, \\ \text{et} \qquad r^2 &= a^2 \frac{\operatorname{Ch} \beta - \cos \alpha}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}. \end{aligned} \right.$$

Sur ces dernières formules, il est évident que le point à l'infini ($r = \infty$) correspond à $\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha = 0$, c'est-à-dire à $\beta = 0$, $\alpha = \pi$, si l'on suppose α limité entre 0 et 2π.

Cette dernière limitation est du reste très naturelle, puisqu'on



obtient les mêmes points en ajoutant à α un multiple quelconque de 2π. Il est intéressant de constater quelle est la signification géométrique du paramètre α. On l'obtient très aisément ainsi : transformons l'espace par inversion à partir du point A, avec la puissance $4a^2$; le disque circulaire se transforme en le demi-plan $\eta B \zeta$, du côté des ζ positifs (cf. la figure); les formules de passage sont :

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{a - z}{\zeta + 2a} = \frac{x^2 + y^2 + (z - a)^2}{4a^2}$$

On en tire, d'après (394) :

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{a^2 - x^2 - s^2}{2\,a\,x} = \operatorname{cotg} \alpha .$$

L'angle α n'est donc autre que l'angle polaire, compté à partir de $B\zeta$, dans le plan de projection $\zeta B \xi$. En faisant varier α entre O et 2π, on aura tous les points de l'espace extérieurs au demi-plan $\eta_1 B \zeta$. Dans l'espace $Oxyz$, la face *avant* du disque correspondra à $\alpha = 0$, et la face *arrière*, à $\alpha = 2\pi$.

Ceci posé, revenons aux formules (400). La fonction $\frac{1}{r}$ est, comme on sait, une fonction harmonique. Son expression en coordonnées toroïdales est :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}{\operatorname{Ch}\beta - \cos\alpha}} .$$

Je dis que l'expression :

$$\text{(401)} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}{\operatorname{Ch}\beta - \cos(\alpha - \omega)}} ,$$

où ω est une constante quelconque, *est aussi une fonction harmonique.* Cela résulte immédiatement des formules (399) et (400), qui permettent d'écrire :

$$R^2 = a^2\,\frac{\operatorname{Ch}\beta - \cos\alpha\cos\omega - \sin\alpha\sin\omega}{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha} = \frac{r^2 + a^2}{2}$$
$$- \frac{a^2 - r^2}{2}\cos\omega - a\,x\sin\omega ,$$

c'est-à-dire :

$$R^2 = \cos^2\frac{\omega}{2}\left[\left(x - a\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]$$

(car on peut supposer $\omega \neq (2k+1)\pi$, R se réduisant à la constante a dans le cas excepté).

R représente ainsi, au facteur constant près $\cos\frac{\omega}{2}$, la distance du point $(x\,y\,z)$ au point fixe $\left(a\operatorname{tg}\frac{\omega}{2},\ 0,\ 0\right)$; $\frac{1}{R}$ est donc harmonique.

Il en sera donc de même de toute fonction construite par une intégration telle que la suivante :

$$J(\omega) = \int_{C_1} \frac{a}{R}\, S(\omega)\, d\omega$$

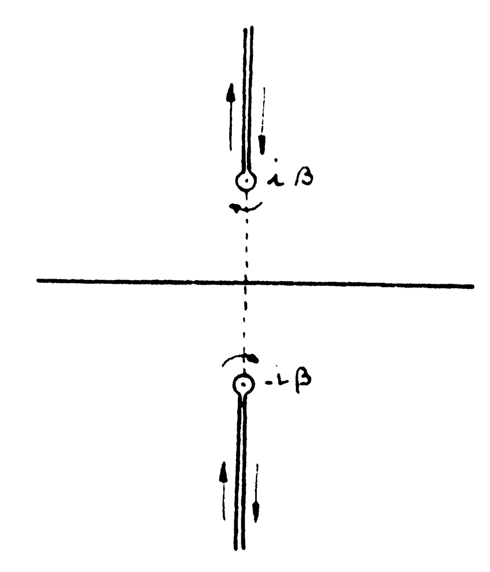
où C_1 représente un chemin d'intégration quelconque, et $S(\omega)$ une fonction de l'argument ω intégrable sur ce chemin. Et il en sera ainsi en particulier pour la fonction :

$$(402) \qquad I(\alpha, \omega_0) = \frac{1}{8\, i \pi} \int_{C_1} \frac{\sqrt{\mathrm{Ch}\, \beta + \cos \alpha}}{\sqrt{\mathrm{Ch}\, \beta - \cos(\alpha - \omega)}} \; \frac{e^{i\frac{\omega}{4}}\, i\, d\omega}{e^{i\frac{\omega}{4}} - e^{i\frac{\omega_0}{4}}} .$$

En changeant ω en $\alpha + \omega$, nous écrirons :

$$(403) \qquad I(\alpha, \omega_0) = \frac{\sqrt{\mathrm{Ch}\, \beta + \cos \alpha}}{8\, i \pi} \int_{C} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}\, \beta - \cos \omega}} \; \frac{e^{i\frac{\omega}{4}}\, i\, d\omega}{e^{i\frac{\omega}{4}} - e^{i\frac{\omega_0 - \alpha}{4}}}$$

et nous choisirons pour contour C correspondant à C_1 par la translation précédente, le double lacet indiqué sur la figure, et entourant les deux points critiques $\omega = \pm i\beta$.



Une intégrale telle que (403) est ce qu'on appelle une intégrale de *Sommerfeld* correspondant à l'indice 4. (Cf. *Sommerfeld*, Proceed. London Math. Soc. 28, p. 395-429). L'expression d'une intégrale de Sommerfeld en général, comporte l'emploi de la fonction

$$\frac{e^{i\frac{\omega}{n}}}{e^{i\frac{\omega}{n}} - e^{i\frac{\omega_0}{n}}}$$

elle se rattache, comme on sait, aux fonctions de Green pour l'espace de Riemann.

Quoi qu'il en soit, une propriété essentielle de la fonction $I(\alpha, \omega_0)$ est de posséder, par rapport à la variable α, *la période* 8π : ce fait est immédiatement en évidence sur la formule (403).

Revenons maintenant à la fonction harmonique Φ qu'il s'agissait de déterminer au moyen des conditions (391) (392) (393). Nous allons voir qu'elle peut très simplement s'exprimer au moyen d'expressions telles que $I(\alpha, \omega_0)$.

Observons tout d'abord que la fonction cherchée $\Phi(xyz)$ sera évidemment symétrique autour de Ox ; exprimée en coordonnées toroïdales, elle ne fera donc intervenir que α et β. On aura :

(404) $$\Phi(xyz) = F(\alpha, \beta).$$

Dans ces conditions, on aura :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

et la dérivation des formules (394) nous définira $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ par les formules :

(405) $$\begin{cases} x + a \operatorname{cotg} \alpha - \dfrac{a x}{\sin^2 \alpha}\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \\[2ex] x + as \dfrac{1}{\operatorname{Sh}^2 \beta}\dfrac{\partial \beta}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Sur la face *avant* du disque, on a $\alpha = 0$, $x = 0$, donc :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \lim \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{x} = \frac{1 + \operatorname{Ch} \beta}{a} \;; \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0.$$

Donc :

(406) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1 + \operatorname{Ch} \beta}{a}\frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad \text{(sur la face avant).}$$

Les conditions (391) et (392) se réduisent donc à :

(407) $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{(face \textit{avant} du disque)} \\[2ex] F = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 2\pi \quad \text{(face \textit{arrière}).} \end{cases}$$

La fonction $F(\alpha, \beta)$ va résulter, comme l'a montré M. Zeilon, de la construction de la fonction suivante, où nous mettons spécialement en évidence la variable α :

$$(408) \qquad G(\alpha, \omega_0) = I(\alpha, \omega_0) - I(4\pi - \alpha, \omega_0) + I(-\alpha, \omega_0) - I(4\pi + \alpha, \omega_0).$$

Il est manifeste que cette fonction $G(\alpha, \omega_0)$ satisfait aux conditions (407); la périodicité, avec la période 8π, assure en effet la seconde de ces deux conditions. Quant à la première, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial I(\alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial I(4\pi - \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} - \frac{\partial I(-\alpha, \omega_0)}{\partial \alpha}$$
$$- \frac{\partial I(4\pi + \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha},$$

et le second membre s'annule visiblement pour $\alpha = 0$.

Un calcul élémentaire effectué d'après (403) nous conduit à l'expression suivante de G :

$$(409) \quad \left\{ \begin{aligned} G(\alpha, \omega_0) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}}{8 i \pi} \int_C \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch} \beta - \cos \omega}} \\ &\left(\frac{1}{\sin \frac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin \frac{\omega - \omega_0 - \alpha}{4}} \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Nous allons nous préoccuper de l'allure de $G(\alpha, \omega_0)$ quand le point $(x\, y\, z)$ s'en va à l'infini, c'est-à-dire, comme nous l'avons remarqué, pour $\alpha = \pi$, $\beta = 0$. Nous constaterons ainsi, si la condition (393) est vérifiée, et nous nous arrangerons pour la vérifier par une modification convenable effectuée sur G.

La valeur que nous adopterons dorénavant pour la constante ω_0, laissée jusqu'ici arbitraire, sera $\omega_0 = \pi$. On verra un peu plus loin pourquoi nous n'avons pas fait directement $\omega_0 = \pi$ dans les équations, sans autre préambule.

Pour développer plus facilement les calculs, introduisons, à côté de $G(\alpha, \omega_0)$ la fonction $G_1(\alpha, \omega_0)$ définie par :

$$(410) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(\alpha, \omega_0) &= \frac{\sqrt{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}}{8 i \pi} \int_{C'} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch} \beta - \cos \omega}} \times \\ &\left(\frac{1}{\sin \frac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin \frac{\omega - \omega_0 - \alpha}{4}} \right) d\omega \end{aligned} \right.$$

l'intégration étant effectuée sur les deux lacets qui constituent C, et auxquels on adjoint deux droites D et D', d'abcisses $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ par exemple, ne contenant entre elles que les deux points critiques $\pm i\beta$ du radical sous le signe intégral. Dans la bande comprise entre D et D', et coupée par les deux lacets, la fonction à intégrer est uniforme, dès qu'on a choisi une détermination pour le radical en un point. Les portions de l'intégrale correspondant à D et à D' donnent des contributions finies, mais quand nous passerons à la limite, le facteur $\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}$ tendant vers zéro, la contribution correspondante deviendra nulle, de sorte qu'au voisinage du point $(x\,y\,z)$ à l'infini, la valeur de G_1 sera la même que celle de G. Or, le seul pôle situé dans le domaine concernant G_1, pour la fonction à intégrer, est le point $\omega = \omega_0 - \alpha = \pi - \alpha$, et le résidu correspondant est :

$$\frac{4}{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}}.$$

La valeur limite de la fonction $G(\alpha, \omega_0)$ est donc :

$$2i\pi \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}}{8i\pi} \cdot \frac{4}{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}} = 1.$$

La fonction G ne vérifie donc pas la condition (393). Mais calculons sa dérivée $\frac{\partial G}{\partial \omega_0}$, qui satisfait évidemment, comme G, aux conditions (407). Pour cela, il est plus commode de transformer légèrement la formule (409) en faisant $\omega - \omega_0 = \omega'$, ce qui donne :

(411)
$$G(\alpha, \omega_0) = \frac{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}}{8i\pi} \int_{C'} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta - \cos(\omega' + \omega_0)}} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega' + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\omega' - \alpha}{4}} \right) d\omega'$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial \omega_0} = -\frac{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}}{8i\pi} \int_{C'} \frac{\sin(\omega' + \omega_0)}{[\operatorname{Ch}\beta - \cos(\omega' + \omega_0)]^{3/2}} \times \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega' + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\omega' - \alpha}{4}} \right) d\omega'.$$

Car on s'assure immédiatement que, bien les droites D et D' soient maintenant soumises à la translation $-\omega_0$, cette circonstance n'introduit dans la dérivée $\frac{\partial G}{\partial \omega_0}$ aucun terme complémentaire.

Repassant, après la dérivation, à la variable ω, il vient :

$$\frac{\partial G}{\partial \omega_0} = -\frac{\sqrt{\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha}}{8\,i\pi}\int_{c}\frac{\sin\omega}{2\,(\text{Ch}\,\beta - \cos\omega)^{3/2}}$$
$$\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\omega - \omega_0 - \alpha}{4}}\right) d\omega.$$

C'est du reste qu'on obtiendrait en dérivant directement la formule (409), puis en transformant par une intégration par parties.

Un raisonnement analogue à celui qu'on a employé pour G, nous montre alors que, au voisinage du point à l'infini $(\alpha = \pi,\ \beta = 0)$ et pour $\omega_0 = \pi$, $\frac{\partial G}{\partial \omega_0}$ se comportera comme :

$$-\frac{\sqrt{\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha}}{8\,i\pi}\cdot\frac{4\sin\alpha}{2\,(\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha)^{3/2}}\cdot 2\,i\pi = \frac{-\sin\alpha}{2\,(\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha)},$$

c'est-à-dire, d'après (399), comme $-\frac{x}{2a}$.

De là, résulte que la fonction :

$$\Phi = 2a\,U\,\frac{\partial G}{\partial \omega_0} + \lambda G \tag{412}$$

satisfait, quelle que soit la constante λ, à toutes les conditions imposées.

Cette indétermination était à prévoir, elle correspond à celle qui est intervenue au Chapitre XVII à propos de la lame plane, et elle se résoudra par le même moyen : nous allons chercher à satisfaire au problème, par une fonction Φ qui fournisse pour la pression totale, une valeur finie. Or, cette pression nous est donnée actuellement par la formule (361) ou (361'); je transcris la première :

$$P = -\frac{\pi\rho}{2}\int_{s'_2}\left(U - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 s\,ds\ ; \tag{413}$$

s'_2 représente ici le segment de droite défini par $a \geqq s \geqq -a$ (section de la face *arrière* du disque, par un plan méridien xos. Pour que P soit fini, il faut que $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ soit intégrable, c'est-à-

dire (d'après $\varphi = \Phi + \mathrm{U}x$) qu'il en soit de même de $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$, sur l'*arrière* du disque.

Par un élégant calcul, M. Zeilon a montré que cette condition était réalisée en prenant dans (412) :

(414) $$\lambda = \frac{a\mathrm{U}}{2}.$$

En formant directement la dérivée $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \omega_0}$ sur la formule (409), et transportant le résultat dans la combinaison :

(415) $$\Phi = 2a\,\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \omega_0} + \frac{a\mathrm{U}}{2}\mathrm{G},$$

on constate de suite que Φ est la somme de la fonction :

$$\Phi_1 = \frac{a\mathrm{U}}{16\,i\pi}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}\int_{\mathrm{C}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}} \times$$
$$\left(\frac{\cos\dfrac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}}{\sin^2\dfrac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}} + \frac{1}{\sin\dfrac{\omega - \omega_0 + \alpha}{4}}\right) d\omega,$$

et d'une fonction Φ_2 obtenue à partir de Φ_1 en y changeant le signe de α. On met Φ_1 sous la forme :

(416) $$\Phi_1 = \frac{a\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}}{8\,i\pi\sqrt{2}} \times$$
$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\sin\dfrac{\omega + \alpha}{4}}{\sin^2\dfrac{\omega + \alpha - \pi}{4}} \frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}},$$

en tenant compte de l'égalité $\omega_0 = \pi$.

Il nous faut calculer maintenant $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ à l'arrière du disque. Or, puisqu'on a ici $\alpha = 2\pi$, les formules (405) nous conduiront à la même équation (406) que pour $\alpha = 0$, à savoir :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1 + \mathrm{Ch}\,\beta}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha},$$

ce qui, à cause de (400), et en retenant toujours qu'on a $\alpha = 2\pi$, nous donne :

(417) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2a}{a^2 - r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{2a}{a^2 - s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}.$$

Tout revient donc au calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, c'est-à-dire de $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}$ pour $\alpha = 2\pi$. Le facteur $\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}$ donne en dérivant un $\sin\alpha$ qui réduit à zéro la contribution correspondante, et il vient par un calcul élémentaire :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=2\pi} =$$

$$\frac{a\mathrm{U}}{4i\pi\sqrt{2}}\sqrt{1+\mathrm{Ch}\,\beta}\int_{\mathrm{C}} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\pi+\omega}{4}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}}.$$

Le contour C comprend deux lacets, C_1 et C_2 ; on passe de l'un à l'autre en changeant ω en $-\omega$, de telle sorte que :

$$\int_{\mathrm{C}_2} \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\pi+\omega}{4}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}}$$

$$\int_{\mathrm{C}_1}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\pi-\omega}{4}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}}.$$

On a donc :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=2\pi} = \frac{a\mathrm{U}}{4i\pi\sqrt{2}}\sqrt{1+\mathrm{Ch}\,\beta} \times$$

$$\int_{\mathrm{C}_1}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\pi+\omega}{4}} + \frac{\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\pi-\omega}{4}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\alpha}}.$$

La parenthèse sous le signe $\frac{d}{d\omega}$ vaut :

$$\frac{4\cos\frac{\omega}{4}}{\sin^2\frac{\omega+\pi}{2}} = \frac{4\cos\frac{\omega}{4}}{\cos^2\frac{\omega}{2}};$$

donc il vient :

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\right)_{\nu=2\pi} = \frac{a\,\mathrm{U}}{i\pi\sqrt{2}}\sqrt{1+\mathrm{Ch}\,\beta}\ \times$$

$$\int_{c_1}\left(-\frac{1}{4}\,\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos^2\frac{\omega}{4}}+\frac{\cos\frac{\omega}{4}\sin\frac{\omega}{2}}{\cos^3\frac{\omega}{2}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta-\cos\omega}}.$$

Et enfin, en remplaçant, dans la parenthèse,

$$\cos\frac{\omega}{4}\sin\frac{\omega}{2}$$

par la quantité égale :

$$\sin\frac{\omega}{4}+\sin\frac{\omega}{4}\cos\frac{\omega}{2},$$

il vient :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\nu=2\pi} = \frac{a\,\mathrm{U}}{i\pi\sqrt{2}}\sqrt{1+\mathrm{Ch}\,\beta}\left[\frac{3}{4}\int_{c_1}\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta-\cos\omega}}\right.$$

$$\left.+\int_{c_1}\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\cos^3\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta-\cos\omega}}\right].$$

Ce résultat s'exprime très facilement au moyen d'intégrales elliptiques, en faisant le changement de variable :

$$\cos\frac{\omega}{2}=\theta.$$

Posant en outre :

$$\mathrm{K}^2=\frac{2}{1+\mathrm{Ch}\,\beta},$$

ce qui, d'après (400) est équivalent, à l'arrière de la plaque, à l'égalité :

$$\mathrm{K}^2=\frac{a^2-r^2}{a^2}=\frac{a^2-s^2}{a^2},$$

il vient :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\nu=2\tau} = \frac{2aU}{i\pi}\left[\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{K}}^{+\infty}\frac{i\,d\theta}{\theta^2\sqrt{1+\theta}\sqrt{K^2\theta^2-1}}\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{K}}^{+\infty}\frac{i\,d\theta}{\theta^3\sqrt{1+\theta}\sqrt{K^2\theta^2-1}}\right],$$

ou enfin, en posant :

$$K\theta = \frac{1}{\tau},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\nu=2\tau} = \frac{aU}{\pi}\left[3\int_0^1\frac{K^{3/2}\tau^2\,d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau^2)(1+K\tau)}}\right.$$
$$\left.+4\int_0^1\frac{K^{5/2}\tau^3\,d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau^2)(1+K\tau)}}\right].$$

On est ainsi ramené au calcul de deux intégrales simples. Le résultat est de la forme :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\nu=2\tau} = a_1 K^{3/2} + a_2 K^{5/2},$$

a_1 et a_2 restant finis pour $K=0$, c'est-à-dire lorsque l'on se place au bord de la plaque $(s=a)$; on doit ensuite transporter cette valeur dans la formule (417), laquelle, d'après la valeur de K^2, prend ici la forme :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\text{arr.}} = \frac{2}{aK^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\nu=2\tau},$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\text{arr.}} = \frac{2}{a}\left(a_1 K^{-\frac{1}{2}} + a_2 K^{\frac{1}{2}}\right).$$

On aperçoit donc bien que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ devient infini sur le bord de la plaque, $(s=a)$, comme $\frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}}$; son carré reste donc intégrable, et il est clair que l'application de la formule (413) donnera pour la pression totale P une valeur finie.

L'expression (415) de Φ résout donc complètement le problème posé. Elle fait connaître au moyen de formules générales (330), dans lesquelles $\varphi = \Phi + Ux$, la distribution des vitesses dans tout l'espace, et elle permet, au moyen des formules (361) ou (361') de calculer explicitement la pression totale P. Il n'y a plus, dans ce dernier calcul, que des difficultés purement matérielles, pour le détail desquelles nous renverrons au beau Mémoire de M. Zeilon. Le résultat numérique de ce calcul est :

$$P = 1{,}179\,\pi a^2 \rho U^2\,,$$

nombre beaucoup trop considérable (le coefficient de M. Eiffel est 0,56).

Une méthode tout à fait semblable à celle qu'on a utilisée pour le disque circulaire, peut être utilisée avec le même succès, comme M. Zeilon l'a montré, pour le cas d'un solide hémisphérique, dont la surface extérieure comporte une face circulaire plane, placée soit à l'avant, soit à l'arrière, perpendiculairement à la direction Ox de la translation. Nous allons le voir rapidement pour l'hémisphère dont la surface plane est à l'arrière.

Hémisphère, face plane à l'arrière.

Le rayon étant a, et r, θ, ψ étant les coordonnées polaires, et s le rayon vecteur en projection sur yoz, tout revient comme on sait, à la recherche d'une fonction φ harmonique, vérifiant les conditions :

$$(418)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = U \cos \alpha \\ \left(\text{à l'avant, c'est-à-dire pour } r = a\,,\quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \\ \left(\text{à l'arrière, c'est-à-dire pour } 0 \leq s \leq a\,,\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

et vérifiant en outre les conditions à l'infini (vitesses nulles).

Ces équations (418) ne font intervenir que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ sur la frontière ;

il est alors naturel d'utiliser la remarque suivante : si φ est une fonction harmonique, il en est de même de la fonction :

$$\varphi_1 = r\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{419}$$

En effet, l'équation de Laplace en coordonnées polaires, est, comme il est bien connu :

$$(420)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

elle peut évidemment s'écrire :

$$r\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \varphi_1 + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\right) = 0.$$

En dérivant par rapport à r, puis multipliant par r, nous obtenons justement l'équation (420) dans laquelle φ est remplacée par φ_1. φ_1 est donc harmonique en même temps que φ.

Les équations (418) prouvent que ce potentiel doit prendre les valeurs :

$$\varphi_1 = a\,U\cos\theta \quad \text{(à l'avant)}$$
$$\varphi_1 = 0 \qquad \text{(à l'arrière)}$$

sur la surface de l'hémisphère. Nous sommes ainsi ramenés à un problème de Dirichlet extérieur.

Il est clair que nous connaissons un potentiel simple correspondant à ces données ; à savoir la fonction :

(421) $$\varphi_0 = - \mathrm{U} a^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathrm{U} a^3 x}{r^3} = \frac{\mathrm{U} a^3 \cos\theta}{r^2},$$

mais cette fonction est infinie pour $r = 0$. Nous chercherons donc à former un potentiel :

(422) $$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_0,$$

qui soit nul sur toute la surface, et qui devienne infini à l'origine, comme $-\frac{\mathrm{U} a^3 x}{r^3}$. Or, on peut former facilement cette fonction de Green, en utilisant les coordonnées toroïdales et les intégrales de Sommerfeld. Le cercle arrière de l'hémisphère servant ici de cercle de base aux coordonnées toroïdales, les formules à utiliser seront encore les formules (398) (399) et (400). La transformation par inversion employée plus haut fera correspondre à la face arrière de l'hémisphère, le demi-plan $\eta_1 B \zeta$, et à la surface sphérique, le demi-plan $\eta_1 B \xi$; la dièdre de ces deux demi-plans correspondra à l'*intérieur* de l'hémisphère, de sorte que l'*extérieur* correspondra à l'espace compris entre ces deux demi-plans, du côté où l'ouverture le long de $O\eta_1$ est égale à $\frac{3\pi}{2}$. En se rappelant la signification géométrique de l'angle α, nous voyons qu'on pourra prendre $\alpha = 0$ pour la face plane à l'arrière, et alors $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$ pour la face convexe à l'avant : on vérifie bien que $x = 0$ pour $\alpha = 0$ (éq. 399) et que, pour $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$ on a bien $x > 0$ et $r^2 = a^2$ (éq. 400).

Les formules (399) et (400) montrent de suite que l'origine correspond à $\alpha = 0$ $\beta = 0$, et qu'au voisinage de ces valeurs on a approximativement :

$$x = \frac{a}{2} \sin\alpha + \ldots \qquad r = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\alpha} + \ldots$$

On a vu d'autre part (éq. 401) que la fonction :

$$\frac{a}{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos(\alpha - \omega_0)}}$$

était harmonique ; il en est donc de même de sa dérivée par rapport à ω_0, savoir :

$$\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left(\frac{a}{\mathrm{R}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}\; \frac{\sin(\alpha - \omega_0)}{[\mathrm{Ch}\,\beta - \cos(\alpha - \omega_0)]^{3/2}}.$$

Pour $\omega_0 = 0$, et lorsque α et β sont voisins de zéro, ce potentiel particulier se comporte comme :

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{2\,\frac{x}{a}}{\left[\sqrt{2}\,\frac{r}{a}\right]^3} = \frac{a^2 x}{2\,r^3}.$$

Au facteur $-2aU$ près, sa singularité à l'origine est donc exactement celle que nous désirons donner à la fonction φ_2.

Cela étant, nous allons former φ_2 en utilisant une fonction analogue à $I(\alpha, \omega_0)$ [fournie par la formule (403)] et construite de la même façon au moyen de $\frac{a}{R}$. Mais comme ici l'intervalle de variation de α est de $\frac{3\pi}{2}$ au lieu de 2π, il est fort naturel d'utiliser une intégrale de Sommerfeld correspondant à l'indice 3 au lieu de l'indice 4. Nous sommes amenés ainsi à introduire la fonction :

$$H(\alpha, \omega_0 - \alpha) = \frac{-2aU\sqrt{\operatorname{Ch}\beta + \cos\alpha}}{6i\pi} \times$$

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch}\beta - \cos\omega}}\,\frac{e^{i\frac{\omega}{3}}\,i\,d\omega}{e^{i\frac{\omega}{3}} - e^{\frac{i}{3}(\omega_0-\alpha)}},$$

C représentera cette fois un contour qui sera précisé plus loin.

Il est manifeste que $H(\alpha, \omega_0 - \alpha)$, en tant que fonction de α, possède la période 6π. Formons la combinaison :

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[H(\alpha, \omega_0 - \alpha) + H(\alpha, \omega_0 + 3\pi - \alpha) - H(\alpha, \omega_0 + \alpha)\right.$$

$$\left. - H(\alpha, \omega_0 + 3\pi + \alpha)\right]_{\omega_0=0},$$

dans laquelle on fera $\omega_0 = 0$ après la dérivation.

Une telle fonction est nulle pour $\alpha = 0$, de toute évidence, et aussi pour $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, à cause de l'existence de la période 6π. Et ce qu'on a dit il y a un instant au sujet de $\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left(\frac{a}{R}\right)$, fait bien

prévoir que la singularité à l'origine sera précisément celle qu'on désirait. Un calcul élémentaire met l'expression précédente sous la forme :

$$\varphi_2 = -\frac{Ua}{3i\pi}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha} \times$$

$$\int_C \frac{\partial}{\partial\omega_0}\left(\mathrm{cotg}\,\frac{\omega - \omega_0 + \alpha}{3} - \mathrm{cotg}\,\frac{\omega - \omega_0 - \alpha}{3}\right)_{\omega_0 = 0} \frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\omega}}.$$

On peut faire de suite $\omega_0 = 0$, à condition de remplacer la dérivation par rapport à ω_0 par une dérivation relative à ω, et de changer en même temps de signe. Il vient ainsi :

$$\varphi_2 = \frac{4aU}{9i\pi}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}\,\sin\frac{2\alpha}{3} \times$$

$$\int_C \frac{\sin\frac{2\omega}{3}\,d\omega}{\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - \cos\omega}\left(\cos\frac{2\omega}{3} - \cos\frac{2\alpha}{3}\right)^2}$$

ou bien, en posant :

$$\cos\frac{\omega}{3} = \lambda,$$

et après quelques réductions faciles :

$$\varphi_2 = \frac{2aU}{3i\pi}\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha}\,\sin\frac{2\alpha}{3} \times$$

$$\int_C \frac{\lambda\,d\lambda}{\left(\lambda^2 - \cos^2\frac{\alpha}{3}\right)^2\sqrt{\mathrm{Ch}\,\beta - 4\lambda^3 + 3\lambda}}.$$

Comme contour C nous adopterons le lacet qui entoure le point $\mathrm{Ch}\,\frac{\beta}{3}$ pour aller à l'infini. On vérifie alors, comme pour le cas du disque, que la fonction φ_2 ainsi définie, satisfait effectivement à toutes les conditions requises, y compris les conditions à l'infini. Un calcul subséquent, tiré de la formule :

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3\cos\theta}{r^2} + \varphi_2$$

(qui se déduit de (419), (421), (422)), permettra ensuite de calculer partout les vitesses et la valeur de la presse totale P . M. Zeilon trouve ainsi pour la pression totale sur l'hémisphère :

$$P = 0{,}6 \,.\, \pi \rho a^2 U^2 \,,$$

valeur encore beaucoup trop grande, la valeur du coefficient de M. Eiffel est 0,29 environ. Mais nous savons pourquoi il ne faut pas nous attendre à rejoindre de près l'expérience, dans l'état actuel de la théorie exposée.

M. Zeilon est encore parvenu à expliciter la solution du problème dans le cas d'un solide hémisphérique qui se présente la face plane en avant. Nous exposerons la solution en question dans le Chapitre suivant, après avoir donné quelques indications indispensables sur les propriétés utiles des fonctions de Legendre.

CHAPITRE XIX

DIGRESSION SUR LES FONCTIONS DE LEGENDRE APPLICATION AU MOUVEMENT DE L'HÉMISPHÈRE, DONT LA FACE PLANE EST EN AVANT

Nous allons rapidement démontrer quelques résultats, du reste classiques, concernant les fonctions de Legendre, dont les propriétés essentielles se rattachent à celles des fonctions harmoniques.

Si l'on écrit l'équation de Laplace en coordonnées polaires r, θ, ψ nous avons déjà rappelé (éq. 420) que cette équation prenait la forme :

$$(423) \qquad \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \psi}\right) = 0.$$

Parmi les solutions de cette équation, celles qui sont homogènes en r, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire :

$$(424) \qquad F = r^n S_n(\theta, \psi),$$

sont des *harmoniques sphériques :* S_n est une *fonction sphérique*, ou *fonction de Laplace*, d'ordre n ; elle satisfait à l'équation :

$$(425) \qquad \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial S_n}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \psi^2} + n(n+1) S_n = 0.$$

Cette équation restant invariable par l'échange de n en $-n-1$, on voit que toute fonction sphérique d'ordre n est en même temps une fonction sphérique d'ordre $-(n+1)$.

Parmi les fonctions sphériques, celles qui ne dépendent pas de ψ, satisfont à la relation suivante, dans laquelle on a posé :

$$(426) \qquad \mu = \cos\theta ;$$

$$(427) \qquad \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\,S_n}{d\mu}\right] + n\,(n+1)\,S_n = 0\ ,$$

ou en développant :

$$(1-\mu^2)\,S''_n - 2\,\mu\,S'_n + n\,(n+1)\,S_n = 0.$$

Tentons l'intégration de cette équation différentielle au moyen d'une série entière. Un calcul élémentaire montre qu'on a la solution (valable pour $|\mu| < 1$) .

$$S_n = A\left[1 - \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\,\mu^2 + \frac{(n-2)\,n\,(n+1)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\mu^4 - \dots\right]$$

$$+ B\left[\mu - \frac{(n-1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\mu^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5\,!}\,\mu^5 + \dots\right]$$

où A et B sont deux constantes arbitraires, et où la loi des coefficients apparaît avec évidence. Ce résultat s'exprime facilement au moyen de la série hypergéométrique, mais nous n'aurons pas besoin de l'utiliser sous cette forme condensée.

Supposons *provisoirement* n entier positif. Il est alors évident que, si n est pair, le coefficient de A se réduira à un polynôme de degré n ; tandis que si n est impair, c'est le coefficient de B qui se réduira à un tel polynome. En ordonnant ces polynomes par rapport aux puissances décroissantes, et introduisant un facteur convenable, on constate qu'on peut leur donner, quelle que soit la parité de n , la même expression :

$$(428) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_n(\mu) = \dfrac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,(2n-1)}{n\,!}\left\{\mu^n - \dfrac{n\,(n-1)}{2\,(2n-1)}\,\mu^{n-2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)\,(2n-3)}\,\mu^{n-4} - \dots\right\} \end{cases}$$

$\mathfrak{L}_n(\mu)$ est le *polynome de Legendre* du degré n . Le coefficient de μ^n a été choisi, comme on le constatera ultérieurement, en vue d'assurer l'égalité $\mathfrak{L}_n(1) = 1$, qui sera démontrée en passant.

Un calcul élémentaire prouve qu'on a pour ce polynome :

$$(429) \qquad \mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{2^n\,.\,n\,!}\,\frac{d^n}{d\mu^n}\,(\mu^2-1)^n\,.$$

Au reste, il est immédiat de constater que l'expression (429) vérifie l'équation différentielle (427); la comparaison des termes en μ^n dans les deux formules (428) et (429) assure l'identité.

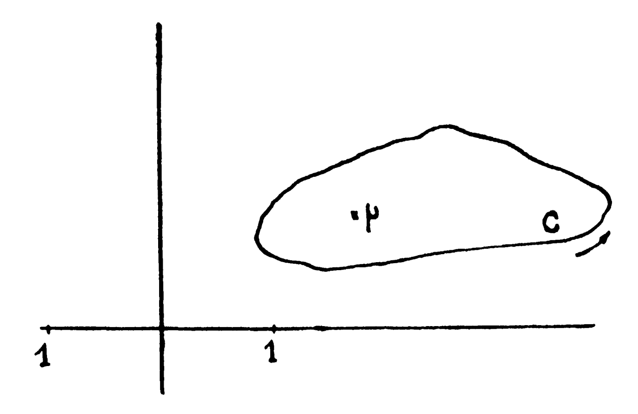
La formule de Cauchy (Ch. I) nous permet maintenant d'écrire :

$$(\mu^2 - 1)^n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{t-\mu}\, dt ,$$

C désignant un contour fermé entourant une fois le point $t = \mu$ dans le plan de la variable t. L'équation précédente nous donne par suite :

(430) $$\mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1} i\pi} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-\mu)^{n+1}}\, dt.$$

Il tombe sous le sens, que, par construction même, cette dernière expression satisfait donc à l'équation différentielle (427). Il va être



très important d'avoir constaté ce fait sous la forme suivante. On a, par un calcul élémentaire, en utilisant l'expression (430) de $\mathfrak{L}_n$:

$$(1-\mu^2)\,\mathfrak{L}''_n - 2\mu\,\mathfrak{L}'_n + n(n+1)\,\mathfrak{L}_n$$
$$= \frac{n+1}{2^{n+1} i\pi} \int_C \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-\mu)^{n+2}}\right] dt.$$

L'équation différentielle est donc satisfaite, parce que la fonction

$$\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-\mu)^{n+2}}$$

reprend la même valeur quand on décrit un contour fermé C autour du point $t = \mu$.

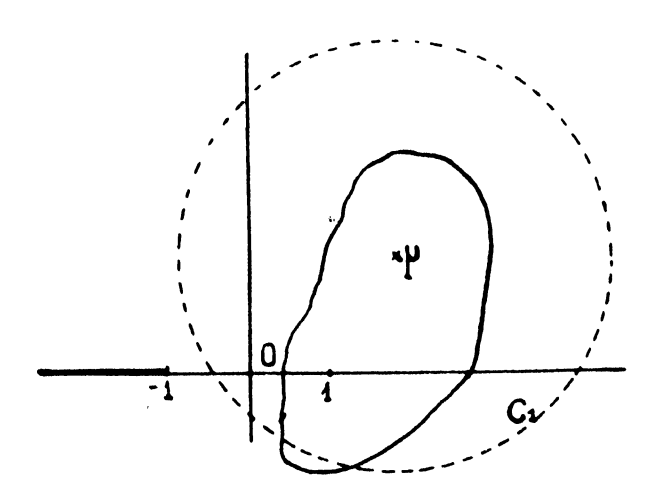
Fonctions de Legendre, de première espèce.

Ce calcul même, nous pouvons maintenant l'interpréter *dans le cas où n n'est plus un nombre entier.* Il est actuellement manifeste qu'une fonction définie par l'intégrale (430) sera une solution de

l'équation différentielle (427) dès que le contour C aura été choisi de telle sorte, que la fonction

$$\frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - \mu)^{n+2}}$$

revienne à sa valeur initiale quand on aura décrit complètement ce contour fermé. Or, il suffit pour cela de choisir, par exemple, le contour C entourant les points $t = 1$ et $t = \mu$, une fois, mais n'entourant pas le point $t = -1$. Pour interdire toute rotation complète autour du point $t = -1$, on tracera la coupure $-1 - \infty$ le long de l'axe réel du plan t, et l'on choisira un contour C tel que celui qu'indique la figure; et pour éviter toute ambiguïté quant aux déterminations des fonctions (multiformes) employées, on conviendra de prendre, pour t réel et supérieur à 1, $\arg(t \pm 1) = 0$, et $|\arg(t - \mu)| < \pi$.



On appelle *fonction de Legendre de première espèce*, la fonction définie par l'équation (430) et ainsi précisée.

Supposons que la partie réelle de μ soit positive; on peut alors prendre pour contour C la circonférence C_1 de centre μ, et de rayon $|\mu^2 - 1|^{1/2}$; il est en effet facile de vérifier qu'on a la double inégalité :

$$|\mu - 1|^2 < |\mu^2 - 1| < |\mu + 1|^2,$$

et par suite la circonférence C_1 contient les points μ et 1 à son intérieur, et laisse le point -1 à son extérieur. Le long de C_1 on pourra poser :

$$t = \mu + (\mu^2 - 1)^{1/2} e^{i\varphi},$$

et faire varier φ par exemple entre $-\pi$ et $+\pi$; on aura d'abord :

$$\frac{t^2-1}{t-\mu} = \frac{[\mu - 1 + (\mu^2-1)^{1/2} e^{i\varphi}]\,[\mu + 1 + (\mu^2-1)^{1/2} e^{i\varphi}]}{(\mu^2-1)^{1/2} e^{i\varphi}}$$

$$= [(\mu-1)^{1/2} + (\mu+1)^{1/2} e^{i\varphi}]\,[(\mu-1)^{1/2} + (\mu+1)^{1/2} e^{-i\varphi}] \,,$$

c'est-à-dire :

$$(431) \qquad \frac{t^2-1}{t-\mu} = 2\,[\mu + (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi].$$

Et par suite, en portant dans (430),

$$\mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\mu + (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n\, d\varphi \,,$$

ou encore :

$$(432) \qquad \mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\mu + (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n\, d\varphi.$$

C'est la *formule de Laplace*. Il convient d'y préciser la détermination de la fonction qui y figure. La formule (431), jointe aux hypothèses faites un peu plus haut, montre qu'il faudra choisir la détermination de $\mu + (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi$, dont l'argument est en module moindre que π lorsque le point t est situé sur l'axe réel, à droite du point $t = 1$.

Remarque. — Supposons qu'au lieu des déterminations choisies pour les arguments de $(t+1)$, $(t-1)$ et $(t-\mu)$ pour t réel et plus grand que 1, on ait préféré prendre dans les mêmes conditions :

$$\arg(t+1) = 0\,, \qquad \arg(t-1) = 2\pi\,, \qquad |\arg(t-\mu)| < \pi\,,$$

la formule (430) montre que la fonction désignée par $\mathfrak{L}_n(\mu)$ aurait été multipliée par $e^{2ni\pi}$; en outre, cela aurait *changé le signe* de l'expression $(\mu^2-1)^{1/2}$. En même temps, la formule (431) prouve que la détermination de $\mu + (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi$, lorsque t est sur l'axe réel à droite du point $t=1$, devrait être prise entre π et 3π. La formule (432) s'écrirait donc, en conservant à $\mathfrak{L}_n(\mu)$ et à $(\mu^2-1)^{1/2}$ la même signification que dans les paragraphes antérieurs :

$$\mathfrak{L}_n(\mu)\, e^{2ni\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\mu - (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n\, d\varphi.$$

Mais si nous convenons maintenant de prendre pour

$$\mu - (\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi$$

la détermination qui, dans les conditions signalées plus haut, possède un argument compris entre $-\pi$ et $+\pi$, cela reviendra à multiplier le second membre de cette égalité par $e^{2ni\pi}$, et, par suite, on aura la formule :

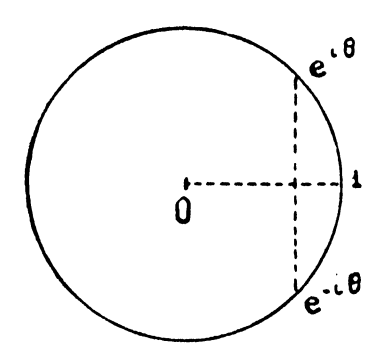
$$(432') \qquad \mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\mu - (\mu^2 - 1)^{1/2} \cos\varphi]^n \, d\varphi$$

avec la convention ci-dessus.

De la formule (432) ou (432') il résulte avec évidence qu'on a :

$$(433) \qquad \mathfrak{L}_n(1) = 1.$$

C'est la propriété qu'on avait annoncée plus haut pour les polynomes de Legendre; elle appartient donc aussi à toutes les fonctions de Legendre. Est-il besoin de dire qu'elle peut se démontrer, pour les polynomes, d'une façon tout à fait élémentaire, indépendamment de la formule de Laplace.



Dans la formule (432) remplaçons φ par une nouvelle variable λ définie par :

$$(434) \qquad \lambda = \mu + (\mu^2 - 1)^{1/2} \cos\varphi.$$

Il vient :

$$(435) \qquad \mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{i}{\pi}\int_{\mu-(\mu^2-1)^{1/2}}^{\mu+(\mu^2-1)^{1/2}} \lambda^n (1 - 2\lambda\mu + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\lambda.$$

L'argument de λ est déterminée par la condition que $\lambda = \mu$ pour $\varphi = \frac{\lambda}{2}$; on a pris en outre :

$$(1 - 2\lambda\mu + \lambda^2)^{+\frac{1}{2}} = -i(\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi.$$

Le chemin d'intégration est ici un segment rectiligne.

Posons :

$$\mu = \cos\theta \quad (\text{éq. } 426).$$

et plaçons-nous dans le cas où θ *est réel*, et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, on a :

$$(\mu^2 - 1)^{1/2} = i \sin \theta ,$$

et :

$$\mathfrak{L}_n (\cos \theta) = \frac{i}{\pi} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \lambda^n (1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda.$$

Le chemin d'intégration est le segment rectiligne qui va du point $e^{-i\theta}$ au point $e^{i\theta}$. Or on peut le remplacer par le segment de circonférence ayant les mêmes extrémités, et passant par le point $\lambda = 1$, car la fonction à intégrer reste régulière dans l'aire délimitée par ces deux chemins, sauf aux deux extrémités, mais cela ne provoque aucun inconvénient : il suffit d'isoler ces deux points par de très petits arcs de circonférences ayant ces points pour centres, et d'en faire tendre ensuite les rayons vers zéro.

En cheminant maintenant sur l'axe de circonférence $|\lambda| = 1$, nous poserons :

$$\lambda = e^{i\omega} ,$$

et il viendra :

$$\mathfrak{L}_n (\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\omega}}{|2 (\cos \omega - \cos \theta)|^{\frac{1}{2}}} d\omega ,$$

c'est-à-dire :

$$(436) \qquad \mathfrak{L}_n (\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \, . \, d\omega}{(\cos \omega - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} .$$

Cette formule est celle de *Melher*.

La démonstration est un peu plus longue si θ n'est pas réel, à cause de la déformation du contour dans l'expression (435).

Sur la formule (436), il est évident qu'on a :

$$(437) \qquad \mathfrak{L}_n (\cos \theta) = \mathfrak{L}_{-n-1} (\cos \theta) ,$$

c'est-à-dire :

$$\mathfrak{L}_n (\mu) = \mathfrak{L}_{-n-1} (\mu).$$

Cette propriété essentielle résulte aussi, plus simplement, de la la remarque suivante :

Revenons à la forme (430) de $\mathfrak{L}_n$, et développons $\dfrac{1}{(t-\mu)^{n+1}}$ sous la forme :

$$(438)\quad \begin{cases} [t-1-(\mu-1)]^{-n-1} = (t-1)^{-n-1} \times \\ \left\{1+(n+1)\dfrac{\mu-1}{t-1}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\left(\dfrac{\mu-1}{t-1}\right)^2+\ldots\right\} \end{cases}$$

ce qui est licite pour $\left|\dfrac{\mu-1}{t-1}\right|<1$. Pour éviter toute difficulté, nous supposerons que C est une circonférence de centre $t=1$, et de rayon $2-\varepsilon$, et nous supposerons que le point μ est à l'*intérieur* de cette circonférence, ou plus précisément à l'intérieur d'une circonférence concentrique du rayon un peu plus petit, $2-\varepsilon-\varepsilon'$, ($\varepsilon$ et ε' sont deux nombres positifs arbitraires et petits). Dans ces conditions, l'inégalité précédente est certainement assurée, et le développement (438) est valable. Transportant dans (430) il vient :

$$\mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1}i\pi}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1}}\left\{1+(n+1)\frac{\mu-1}{t-1}\right.$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\left(\frac{\mu-1}{t-1}\right)^2+\ldots$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1\,.\,2\ldots p}\left(\frac{\mu-1}{t-1}\right)^p+\ldots\right\}dt.$$

Le terme général de ce développement est :

$$\frac{(\mu-1)^p}{2^{n+1}i\pi}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p\,!}\int_C\frac{(t+1)^n\,dt}{(t-1)^{p+1}},$$

et la formule de Cauchy nous donne aussitôt :

$$\int_C\frac{(t+1)^n\,dt}{(t-1)^{p+1}} = \frac{2i\pi}{p\,!}\,\frac{d^p}{dt^p}\,[(t+1)^n]_{t=1},$$

ce qui, vu la détermination précisée antérieurement pour $t+1$, donne de suite :

$$\int_C\frac{(t+1)^n}{(t-1)^{p+1}}\,dt = \frac{2i\pi}{p\,!}\,n(n-1)\ldots(n-p+1)\,.\,2^{n-p}.$$

On a ainsi :

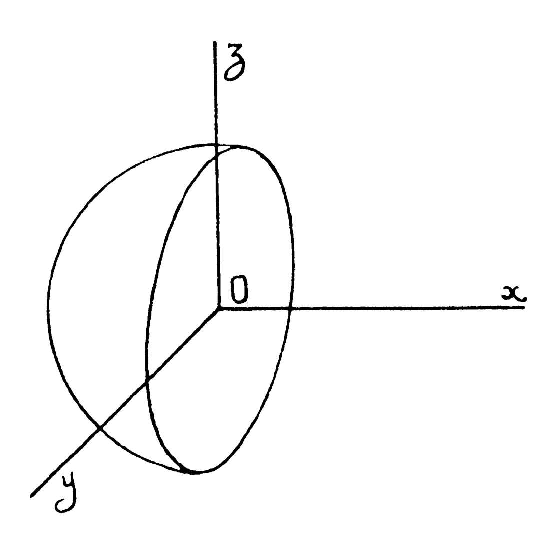
$$(439)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}_n(\mu) = 1 &+ n(n+1)\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \\ &+ \frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{(2\,!)^2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 + \dots \\ &+ \frac{(n-p+1)\dots(n-1)\,n\,.(n+1)(n+2)\dots(n+p)}{(p\,!)^2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2 \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

et sur cette expression, qui du reste s'exprime immédiatement par une série hypergéométrique, on reconnaît que l'échange de n en $-n-1$ laisse invariable le résultat. D'où la formule :

$$(440)\qquad \mathfrak{L}_n(\mu) = \mathfrak{L}_{-n-1}(\mu).$$

Le problème de l'hémisphère, face plane en avant.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la belle solution qu'a donnée M. Zeilon (loc. cit. p. 60). φ désignant toujours le



potentiel auquel le problème a été ramené, les conditions sur la surface sont :

$$(441)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U && (\text{à l'avant, pour } x = 0 \quad r = s \leq a) \\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 && (\text{à l'arrière, pour } x < 0 \quad r = a). \end{aligned} \right.$$

On voit immédiatement que la fonction :

$$(412)\qquad \chi = r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

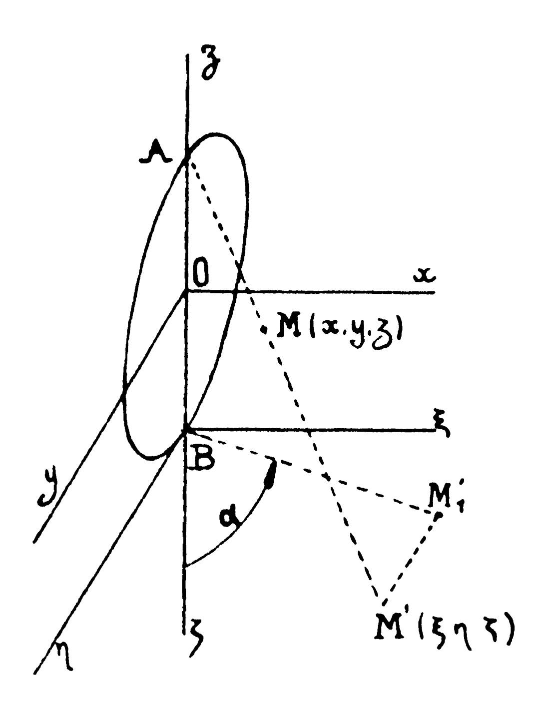
est comme φ, une fonction harmonique, déduite de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ comme φ_1 l'a été de φ dans la formule (419), et cette nouvelle fonction harmonique vérifiera évidemment la condition :

$$(443) \qquad \chi = 0$$

sur les deux frontières, puisque la dérivation par rapport à r sur la face plane à l'avant, se fait dans ce plan même, où $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ reste constant.

La fonction χ possèdera naturellement des singularités sur la frontière du domaine, c'est-à-dire ici, de toute évidence, sur la circonférence qui limite la face avant. Les coordonnées toroïdales vont nous permettre encore de construire cette fonction.

La même inversion qu'on a utilisée au chapitre précédent montre que le domaine extérieur à l'hémisphère actuel peut être obtenu en faisant varier l'angle α, des coordonnées toroïdales, entre les



limites $\alpha = 0$ (correspondant à la face avant) et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ (correspondant à la face courbe à l'arrière).

Or, nous connaissons immédiatement un grand nombre de fonctions, *harmoniques dans l'espace* $B\xi\eta\zeta$, et qui s'annulent pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ quel que soit β : il suffit de penser à la variable complexe $\zeta + i\xi$, dont toutes les puissances fournissent, par leur partie réelle ou leur partie imaginaire, des fonctions harmo-

niques; α et h étant les coordonnées polaires de la projection M'_1 de M' sur le plan $\zeta O \xi$, nous avons :

$$(\zeta + i\xi)^n = h^n e^{in\alpha}.$$

Nous en concluons, en prenant des valeurs particulières pour n, que les fonctions :

$$(444) \qquad h^{2/3} \sin \frac{2\alpha}{3}, \quad h^{4/3} \sin \frac{4\alpha}{3}, \quad \ldots$$

sont des fonctions harmoniques, s'annulant toutes pour

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Au moyen de ces fonctions particulières, nous allons pouvoir en former d'autres, jouissant de la même propriété, mais qui soient harmoniques dans l'espace $Oxyz$. Pour cela, il suffit d'utiliser un théorème de lord Kelvin, dont je vais rappeler la démonstration. Ce théorème est le suivant :

Si l'on a une fonction harmonique, exprimée en coordonnées polaires r, θ, ψ, soit $f(r, \theta, \psi)$, la fonction :

$$f_1 = \frac{k}{r} f\left(\frac{k}{r}, \theta, \varphi\right)$$

où k est une constante quelconque, est aussi une fonction harmonique. Le second membre fait intervenir ce qu'est devenue la fonction $f(r, \theta, \varphi)$ par une inversion de centre origine.

Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour $k = 1$, et pour la fonction :

$$(445) \qquad f_2 = \frac{1}{r} f\left(\frac{1}{r}, \theta, \psi\right).$$

Or, comme on l'a déjà rappelé, l'équation de Laplace, en coordonnées polaires, s'écrit, pour la fonction $f(r, \theta, \psi)$:

$$(446) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f(r, \theta, \psi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f(r, \theta, \psi)}{\partial \theta}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial f(r, \theta, \psi)}{\partial \psi}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour écrire que f_2 est harmonique, il faut donc former tout d'abord

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f_2}{\partial r}\right)$. Or, on a, en réservant les notations $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ pour les dérivées *prises par rapport à* r *dans* $f(r, \theta, \psi)$,

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f\left(\frac{1}{r}, \theta, \psi\right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial f\left(\frac{1}{r}, \theta, \psi\right)}{\partial r^2},$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f_2}{\partial r}\right) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial f\left(\frac{1}{r}, \theta, \psi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{r}, \theta, \psi\right)}{\partial r^2}.$$

L'équation qui exprime que f_2 est harmonique sera donc, en remplaçant $\frac{1}{r}$ par r' :

$$2 r'^2 \frac{\partial f(r', \theta, \psi)}{\partial r'} + r'^3 \frac{\partial^2 f(r', \theta, \psi)}{\partial r'^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \,.\, r' \frac{\partial f(r', \theta, \psi)}{\partial\theta}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta} r' \frac{\partial f(r', \theta, \psi)}{\partial\psi}\right) = 0.$$

Or, au facteur r' près, et à l'échange près des notations, il est visible que cette équation coïncide avec (446), ce qui démontre le théorème.

Ceci posé, revenons à nos fonctions (444). Un calcul simple, utilisant les formules de transformation déjà employées

$$(447) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{a - z}{\zeta + 2a} &= \frac{x^2 + y^2 + (z - a)^2}{4a^2} \\ &= \frac{4a^2}{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + 2a)^2} \end{aligned} \right.$$

conduit à l'expression

$$\zeta + i\xi = -2a \frac{r^2 - a^2 - 2iax}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}.$$

Les fonctions $h^n \sin n\alpha$ signalées plus haut sont donc fournies, à un facteur constant près, par la partie imaginaire des fonction

$$G_n = \left[\frac{r^2 - a^2 \pm 2iax}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}\right]^n$$

qui sont harmoniques dans l'espace $(\xi\, \eta\, \zeta)$ (1) ; elles correspondront

(1) Bien entendu r désigne ici $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et n'a plus la même signification que dans le courant de la démonstration du théorème de lord Kelvin.

donc à de nouvelles fonctions harmoniques construites au moyen du théorème de lord Kelvin ; et ces nouvelles fonctions sont évidemment

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \left[\frac{r^2 - a^2 \pm 2\, i\, a\, x}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}\right]^n$$

puisque l'inversion (447) ramène le second facteur à l'expression (harmonique) $(\zeta + i\, \xi)^n$.

Nos fonctions élémentaires que nous utiliserons, seront donc les parties imaginaires d'expressions telles que

$$G_n = \frac{[r^2 - a^2 \pm 2\, i\, a\, x]^n}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{n+\frac{1}{2}}},$$

ou, d'après les explications antérieures, nous prendrons

$$n = \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \ldots\ldots$$

Introduisons les coordonnées polaires (s, γ) en projection sur $y\, o\, z$, c'est-à-dire posons

$$y = s \sin \gamma, \qquad z = s \cos \gamma,$$

alors

$$G_n = \frac{[r^2 - a^2 \pm 2\, i\, a\, x]^n}{[r^2 + a^2 - 2\, a\, s \cos \gamma]^{n+\frac{1}{2}}}.$$

En intégrant par rapport à γ, on aura un potentiel plus général,

$$H_n = [r^2 - a^2 \pm 2\, i\, a\, x]^n \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{(r^2 + a^2 - 2\, a\, s \cos \gamma)^{n+\frac{1}{2}}}$$

fonction harmonique dans l'espace (x, y, z), et qui possédera visiblement la même propriété que celle dont nous sommes partis, concernant son annulation sur toute la surface de l'hémisphère pour les valeurs convenables de n.

Passons maintenant aux cordonnées toroïdales. En négligeont un facteur constant, H_n se réduit à l'expression suivante :

$$(448) \quad h_n = \sqrt{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha}\; e^{in\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{(\operatorname{Ch} \beta - \operatorname{Sh} \beta \cos \gamma)^{n+\frac{1}{2}}}$$

sur laquelle la propriété rappelée à l'instant est, plus encore, en évidence.

Or, en posant

$$\mu = \mathrm{Ch}\,\beta \quad \text{et} \quad (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Sh}\,\beta \ ,$$

le radical étant ici arithmétique puisque β étant réel, on a $\mu \geqq 1$, nous voyons apparaître l'expression :

(449) $$h_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{\left|\mu - (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\gamma\right|^{n+\frac{1}{2}}}$$

Or la formule de Laplace, sous la forme (432'), permet d'écrire

$$\mathfrak{L}_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\mu - (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\gamma\right|^n d\gamma$$

et par suite ici,

(450) $$\mathfrak{L}_{-n-\frac{1}{2}}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathrm{Ch}\,\beta - \mathrm{Sh}\,\beta \cos\gamma)^{-n-\frac{1}{2}} d\gamma$$

Mais la formule (440) donne

$$\mathfrak{L}_{-n-\frac{1}{2}} = \mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}} \ ,$$

donc il vient

$$\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{(\mathrm{Ch}\,\beta - \mathrm{Sh}\,\beta \cos\gamma)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Donc, en revenant à h_n par la formule (448) :

(451) $$h_n(\alpha, \beta) = 2\pi\,(\mathrm{Ch}\,\beta + \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}\, e^{in\alpha}\, \mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\beta)$$

En outre, d'après la formule de Mehler (436) nous pouvons donner à $\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\beta)$ l'expression :

(452) $$\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{Ch}\,\beta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{i\beta} \frac{\cos n\omega\, d\omega}{(\cos\omega - \mathrm{Ch}\,\beta)^{1/2}}$$

C'est à l'aide des expressions h^n, que l'on va parvenir à

l'expression de la fonction harmonique χ cherchée. Il faut retenir que seule la partie imaginaire de h_n est à utiliser.

La condition que la pression totale soit finie, va nous permettre de limiter le nombre des fonctions h_n à considérer. Cette pression est fournie par la formule (361) où l'on doit intégrer sur la demi-circonférencce S'_2 qui engendre la demi-sphère dans sa rotatíon autour de ox . s désignant toujours la distance à l'axe ox , il faut donc que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$ soit intégrable par rapport à s . Or, sur la face arrière on a $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, et $s = a \operatorname{th} \beta$ d'après la formule (398); S'_2 est décrit en faisant varier β de $+\infty$ à $-\infty$; à cause de la symètrie par rapport à ox , il suffit ici que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$ soit intégrable lorsque s varie entre o et a . Or, d'une part, on voit immédiatement que $a - s = \frac{a\, e^{-\beta}}{\operatorname{Ch} \beta}$ est comparable à $\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \beta}$ pour $\beta = +\infty$. D'aure part, dans h_n le premier facteur devient infini comme $(\operatorname{Ch} \beta)^{\frac{1}{2}}$; le facteur $\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Ch} \beta)$ peut, d'après (450), recevoir la forme

$$\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Ch} \beta) = \frac{1}{\pi} (\operatorname{Ch} \beta)^{n-\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} (1 - \operatorname{th} \beta \cos \gamma)^{n-\frac{1}{2}} d\gamma \;,$$

et comme les valeurs $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, ... adoptées pour n sont supérieures à $\frac{1}{2}$, on voit que l'intégrale $\int_0^{\pi}$ est finie, et que $\mathfrak{L}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{Ch} \beta)$ se comporte comme $(\operatorname{Ch} \beta)^{n-\frac{1}{2}}$. Donc, en définitive, h_n devient infini comme $(\operatorname{Ch} \beta)^n$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{(a-s)^{\frac{n}{2}}}$

Ceci posé, prenons la fonction χ construite comme une combinaison linéaire de fonctions h_n . Soit N le plus grand indice employé pour n ; $\chi = r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ deviendra donc infini comme $\frac{1}{(a-s)^{\frac{N}{2}}}$, donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sera de l'ordre de $\frac{1}{(a-s)^{\frac{N}{2}-1}}$, et son carré restera intégrable si l'on a $2\left(\frac{N}{2} - 1\right) < 1$, c'est-à-dire $N < 3$

Ceci limite à quatre les valeurs possibles pour n, à savoir : $n = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$,

Mais la condition ci-dessus n'est pas suffisante. En effet, dans l'établissement de la formule (361) qui donne P, on a fait intervenir certaines intégrales étendues au côté de S_1 de la méridienne située à l'avant et nos raisonnements exigent implicitement que ces intégrales soient finies, c'est-à-dire que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$ soit intégrable sur la face avant S'_1. C'est naturellement ce qui se passera de soi-même lorsqu'on se sera arrangé pour que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ soit égal à U à l'avant, mais cette condition n'est pas encore satisfaite, et ce qui suit est nécessaire pour que la condition puisse devenir vérifiée. Or, si nous nous plaçons sur la face avant, on a $\alpha = 0$, et par suite $s = a \frac{\text{Sh}\, \beta}{\text{Ch}\, \beta + 1}$, c'est-à-dire $s = a \text{ th } \frac{\beta}{2}$, et $a - s = \frac{a e^{-\frac{\beta}{2}}}{\text{Ch}\, \frac{\beta}{2}}$, expression qui s'annule seulement comme $\frac{1}{\text{Ch}\, \beta}$.

En continuant le raisonnement comme sur la face arrière, nous voyons qu'il suffit simplement de remplacer $\frac{N}{2}$ par N, ce qui nous conduit à $2\,N < 3$, et nous donne

$$n = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$$

comme seules valeurs à considérer.

En retenant que nous n'avons affaire qu'à la partie imaginaire des fonctions h_n, nous voyons que nous devrons adopter pour χ une expression de la forme

$$(453) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi = \sqrt{\text{Ch}\, \beta + \cos \alpha} \times \\ \left\{ A_1 \sin \frac{2\alpha}{3} \mathfrak{L}_{\frac{1}{6}} (\text{Ch}\, \beta) + A_2 \sin \frac{4\alpha}{3} \mathfrak{L}_{\frac{5}{6}} (\text{Ch}\, \beta) \right\} \end{array} \right.$$

A_1 et A_2 étant deux coefficients à déterminer.

Nous définirons ces deux coefficients en revenant à la fonction φ, et en exprimant qu'elle satisfait aux conditions non encore réalisées, à savoir : 1° la condition à l'infini, 2° la condition $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U$ à l'avant.

φ doit s'annuler à l'infini comme $\frac{1}{r}$, donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ comme

$-\frac{x}{r^3} = -\frac{\cos\theta}{r^2}$; et $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$, comme $\frac{2\cos\theta}{r^3}$; et χ par suite, comme $\frac{2\cos\theta}{r^2}$. Or, en coordonnées toroïdales, les points à l'infini correspondent à $\alpha = \pi$, $\beta = 0$.

Dans l'expression (453), le facteur $\sqrt{\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha}$ s'annule comme $\frac{1}{r}$ (formule 400); il faut donc que la parenthèse qui vient en facteur s'annule encore pour ces valeurs de α et β. Cela donne

$$A_1 \sin\frac{2\pi}{3}\,\mathfrak{P}_{\frac{1}{6}}(1) + A_2 \sin\frac{4\pi}{3}\,\mathfrak{P}_{\frac{5}{6}}(1) = 0 ,$$

c'est-à-dire, à cause de (433);

$$A_2 = A_1 ,$$

moyennant quoi on a

$$(454) \quad \begin{cases} \chi = A_1 \sqrt{\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha} \times \\ \left[\sin\frac{2\alpha}{3}\,\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}}(\text{Ch}\,\beta) + \sin\frac{4\alpha}{3}\,\mathfrak{P}_{\frac{5}{6}}(\text{Ch}\,\beta)\right] \end{cases}$$

Pour repasser de χ à φ, on a la relation :

$$(455) \qquad \chi = r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

Calculons la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sur la face avant $(\alpha = 0)$. Nous savons déjà que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ y est constant. Calculons-le simplement au centre de cette face, c'est-à-dire à l'origine.

Pour cela, il suffit d'intégrer le long de l'axe des x, le long duquel on a $x = r$, en parcourant cet axe de $x = +\infty\,(\beta = 0, \alpha = \pi)$ à $x = 0\,(\beta = 0,\ \alpha = 0)$. La formule (398) $s = \frac{a\,Sh\,\beta}{\text{Ch}\,\beta + \cos\alpha}$ montre que β sera nul tout le long de cet axe. Et comme χ est nul au point à l'infini sur ox, on aura

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{(\alpha=\beta=0)} = \int_{x=+\infty}^{x=0} \frac{(\chi)_{\beta=0}}{x}\,dx$$

Mais, le long de ox, on a (f. 399) :

$$x = a\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = a\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} ,$$

donc

$$dx = \frac{a\,d\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

D'autre part, la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ au point O doit être égale à U ; il vient donc l'égalité

$$U = A_1 \int_{\pi}^{0} \left[\sin\frac{2\alpha}{3}\,\mathcal{L}_{\frac{1}{6}}(1) + \sin\frac{4\alpha}{3}\,\mathcal{L}_{\frac{5}{6}}(1)\right] \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,\frac{d\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,,$$

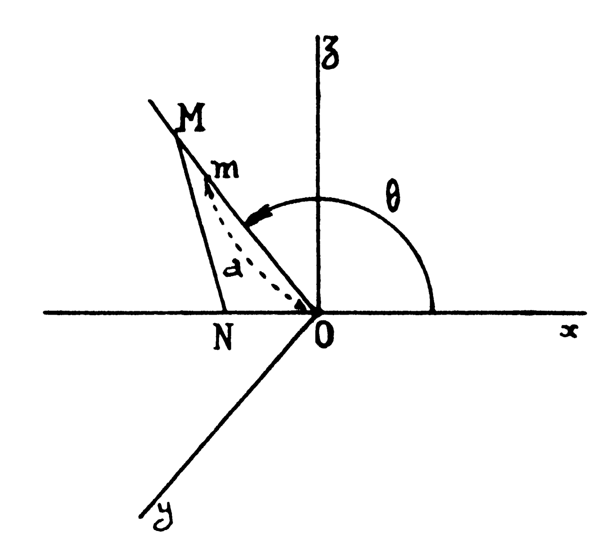
ou en simplifiant,

$$U = -2A_1\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{3}\,d\alpha\,,$$

d'où

(456) $$A_1 = -U\sqrt{2}\,\frac{5}{36}\,.$$

Ceci détermine complètement la fonction χ. Il est aisé de vérifier *a posteriori* que cette fonction satisfait bien à toutes les conditions imposées. La principale application de son calcul consiste dans la détermination de la pression totale P du liquide sur l'hémisphère. D'après la formule (361) que donne ici P, il suffit de



connaître la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en tout point de la face arrière. C'est encore la formule (455) qui nous donnera cette valeur ; mais cette fois

il faudra intégrer par rapport à r le long d'un rayon vecteur, du point à l'infini $(\beta = 0,\ \alpha = \pi)$ au point sur la sphère $r = a$ $\left(\alpha = \frac{3\pi}{2}\right)$ sur laquelle β peut prendre toutes les valeurs.

Le long d'un tel rayon vecteur l'angle $x o \mathrm{M} = \theta$ garde une valeur fixe, et l'on a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{s}{x} \quad ,$$

c'est-à-dire, à cause des formules connues (398) et (399)

$$s = \frac{a \operatorname{Sh} \beta}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha} \quad , \quad x = \frac{a \sin \alpha}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha} \quad ,$$

(457) $$\operatorname{Sh} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \theta \ .$$

On aura ensuite

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{r=a} = \int_{\alpha=\pi}^{\alpha=\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\mathrm{Z}}{r}\right)_{\text{sur } om} d r \quad ,$$

la fonction à intégrer étant prise sur le rayon fixe $o m$. Comme $x = r \cos \theta$, on aura sur le rayon :

$$\frac{d r}{r} = \frac{d x}{x} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} d \alpha - \frac{\operatorname{Sh} \beta \, d \beta - \sin \alpha \, d \alpha}{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha} \ .$$

Nous garderons la variable α, et nous remplacerons β au moyen de (457), qui nous donne d'abord

$$d \beta = \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \theta \, d \alpha}{\operatorname{Ch} \beta}$$

Remplaçant et simplifiant, il vient, sur $o m$,

$$\frac{d r}{r} = \frac{d \alpha}{\operatorname{Ch} \beta \sin \alpha}$$

On aura donc, en tout point de la demi-sphère arrière,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{r=a} = \mathrm{A}_1 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{Ch} \beta + \cos \alpha} \ \times$$

$$\left[\sin\frac{2\alpha}{3}\,\mathfrak{L}_{\frac{1}{6}}^{1}(\mathrm{Ch}\,\beta)+\sin\frac{4\alpha}{3}\,\mathfrak{L}_{\frac{5}{6}}^{1}(\mathrm{Ch}\,\beta)\right]\frac{d\alpha}{\mathrm{Ch}\,\beta\sin\alpha}$$

formule dans laquelle $\mathrm{Ch}\,\beta$ devra être remplacé au moyen de α , par

$$\mathrm{Ch}\,\beta=\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\theta}$$

d'après l'équation (457). A_1 aura naturellement sa valeur (456)

Pour avoir la pression totale P , il ne reste plus à effectuer que des calculs purement numériques, sans autre difficulté que leur longueur. M. Zeilon trouve le résultat suivant :

$$\mathfrak{L}=0{,}622\,\pi\,\rho\,a^2\,U^2\ .$$

Ce résultat est sensiblement le même que pour l'hémisphère placé la face en avant. Comme les précédents, il est notablement trop élevé.

CHAPITRE XX

CAS DU FLUIDE LIMITÉ — APPLICATIONS CONCLUSIONS

Les considérations des paragraphes antérieurs peuvent être étendues au cas d'un fluide, non plus illimité, mais contenu entre des parois solides, ces dernières étant telles qu'un mouvement permanent du corps en mouvement soit cependant possible. J'ai donné des indications sur ce sujet dans une note aux *Comptes-rendus* (février 1927, tome 184), et quelques développements dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques* (9e Série, VII, 1928, tome I du Jubilé de MM. A. Appell et E. Picard, p. 429-452).

Nous exposerons ici l'exemple de la plaque plane mobile avec une vitesse U dans un fluide limité par un mur rectiligne et occupant tout l'espace d'un seul côté de ce plan ; nous admettrons que la plaque a une direction perpendiculaire au mur, et qu'elle se déplace parallèlement à celui-ci.

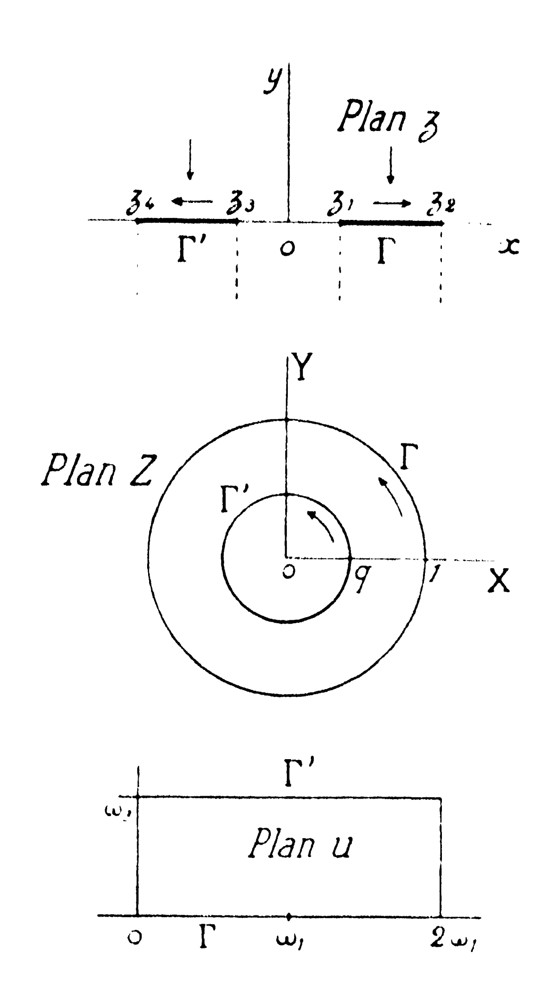
Il revient alors au même de considérer le fluide comme illimité dans tous les sens, en plaçant dans le fluide *deux* plaques identiques, symétriques par rapport au mur. On a ainsi la disposition indiquée par la figure ci-jointe, où l'on remarquera que, en vue de simplification d'écritures ultérieures, on a changé les rôles que jouaient les axes ox et oy dans les paragraphes antérieurs.

En posant

$$(458) \qquad \begin{aligned} Z &= e^{i\pi\frac{u}{\omega_1}} \\ z &= i\,B\left[\zeta\left(u-\frac{\omega_3}{2}\right)-\zeta\left(u+\frac{\omega_3}{2}\right)\right]+C, \end{aligned}$$

la fonction ζ étant la fonction classique de Weierstrass, construite avec les demi-périodes ω_1 et ω_3 $\left(q = e^{\frac{-\pi\omega_3}{i\omega_1}}\right)$, et B et C étant

des constantes réelles convenables, on fera correspondre conformément entre elles les aires représentées par les figures ci-jointes dans les plans z, Z et u.



On trouve facilement que, en vue d'assurer la symétrie par rapport à ox dans le plan z, il suffit de prendre :

(459) $$C = iB\left(\zeta\frac{\omega_3}{2} + \zeta_3\frac{\omega_3}{2}\right)$$

et, si l désigne la largeur commune des deux lames on aura :

(460) $$l = 2iB\left(\zeta\frac{\omega_3}{2} - \zeta_1\frac{\omega_3}{2}\right) = -2B\sqrt{e_2 - e_3}\,.$$

Les notations que nous adoptons ici sont celles du *Traité des Fonctions Elliptiques* de Tannery et Molk. On sait qu'avec ces notations $\sqrt{e_2 - e_3}$ est une quantité *négative*. On choisira donc B positif.

Ceci posé, le potentiel φ dont dépend la construction du problème hydrodynamique, doit satisfaire aux conditions :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathrm{U}, \text{ sur l'avant des deux lames ;}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ sur l'arrière ;}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ à l'infini.}$$

En posant :

(461) $$\varphi = \mathrm{U}y + \varphi_1,$$

ceci revient à chercher φ_1 tel que :

(462) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \text{ à l'avant ;} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \text{ à l'arrière ;} \end{cases}$$

(463) $$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0\ , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{U} = 0 \text{ à l'infini.}$$

Appelant comme d'habitude ψ_1 la fonction conjuguée de φ_1, et posant :

(464) $$f_1(z) = \varphi_1 + i\,\psi_1,$$

puis :

(465) $$\Phi_1 = \frac{df_1}{dz} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\ ,$$

on voit qu'il va s'agir de construire une fonction analytique $\Phi_1(z)$, dont la partie réelle, ou la partie imaginaire, soit réelle sur telle ou telle portion des frontières du domaine.

Passons du plan z dans le plan Z ; posons, sur les frontières, $Z = e^{i\theta}$, ou $Z = q\,e^{i\theta}$, $(0 < \theta < 2\pi)$. Le problème est alors ramené à trouver une fonction de la variable Z, telle qu'en désignant par $A + i\,B$ et $A' + i\,B'$ les valeurs qu'elles prend respectivement sur les deux fonctions, on ait :

$$\mathrm{B} = 0\ , \quad \mathrm{B}' = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \theta < \pi$$
$$\mathrm{A} = 0\ , \quad \mathrm{A}' = 0 \quad \text{pour} \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Ces conditions sont de la forme :

(466) $$a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} = 0$$
$$a'\mathrm{A}' + b'\mathrm{B}' = 0.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a' = 0 \\ b = b' = 1 \end{array} \right. \quad \text{pour} \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a' = 1 \\ b = b' = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour} \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Ce problème appartient à une classe de questions que l'on sait résoudre (cf. H. VILLAT : *Sur un problème généralisé de* HILBERT, *concernant les fonctions analytiques.* (Congrès des Sociétés Savantes, Poitiers, avril 1926).

On remarque d'abord que l'expression $\frac{1}{2} \log \frac{a - i b}{a + i b}$ prend sur la lame Γ les valeurs $-\frac{i\pi}{2}$ et 0, à l'avant et à l'arrière en choisissant convenablement la détermination du logarithme. Formons alors une fonction $F(Z)$ défini dans la couronne et dont la partie imaginaire soit égale, sur Γ, et de même sur Γ', aux valeurs précédentes. L'application de notre formule (29) (page 20 du présent volume) donne de suite :

$$F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(-\frac{i\pi}{2} \right) \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta$$
$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(-\frac{i\pi}{2} \right) \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta \quad .$$

La condition (10) de régularité est vérifiée d'elle-même. Ceci s'écrit immédiatement, d'après (458) :

$$F(Z) = -\frac{1}{2} \log \frac{\sigma(u - \omega_1)}{\sigma u} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_3(u - \omega_1)}{\sigma_3 u}$$

Si l'on considère alors la fonction :

$$(467) \qquad \Phi_0(Z) = i e^{F} = i \sqrt{\frac{\sigma_3(u - \omega_1)\, \sigma u}{\sigma(u - \omega_1)\, \sigma_3 u}}$$

on vérifiera sans peine qu'elle satisfait aux conditions (466).

Nous déduirons donc de ce calcul *une* fonction satisfaisant aux conditions (462), mais qui n'aura aucune raison de satisfaire aux relations (463).

Pour parvenir à satisfaire également à ces dernières, observons que si Φ_0 satisfait aux conditions (462), il en sera de même de l'expression $\Phi_0 \times \gamma(Z)$ si nous désignons par $\gamma(Z)$ une fonction définie dans la couronne, et qui soit *réelle* sur tout le contour de Γ

et de Γ'. Une telle fonction $\gamma(Z)$, comme cela est bien classique, ne saurait différer d'une constante si elle ne possède pas sur les frontières quelque point singulier. Or, ici les points singuliers qui s'imposent manifestement sont les points correspondant aux extrémités des deux lames, c'est-à-dire $Z = \pm 1$, $Z = \pm q$, ou bien, dans le plan u, $u = 0$, ω_3, ω_1, ω_2.

Dans ces conditions, il va être facile de former une fonction $\gamma(Z)$ ayant les propriétés voulues. Des formules élémentaires concernant les fonctions ζ et ζ_α (cf. notamment les formules, 32, 45 et 49), on déduit de suite, que la fonction :

$$a_1 \zeta u + a_2 \zeta(u - \omega_1) - \frac{a_1 + a_2}{\omega_1} \eta_1 u + C_1 + i C_2$$

où a_1, a_2, C_1, C_2, sont des nombres réels, a sa partie imaginaire *constante* sur Γ et sur Γ'. Il en sera de même pour l'expression :

$$a_3 \zeta(u - \omega_3) + a_4 \zeta(u + \omega_2) - \frac{a_3 + a_4}{\omega_1} \eta_1 u + C_3 + i C_4$$

et par suite pour la somme, à laquelle on peut donner la forme :

$$a_1 \zeta u + a_2 \zeta_1 u + a_3 \zeta_3 u + a_4 \zeta_2 u - a_2 \eta_1 - a_3 \eta_3 - a_4 (\eta_1 + \eta_3)$$
$$- \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\omega_1} \eta_1 u + C + i C'.$$

On peut s'arranger pour que cette fonction soit *réelle* sur Γ et sur Γ'. Sur Γ $(0 < u < 2\omega_1)$, cela donne :

$$(a_3 + a_4) \eta_3 = i C'.$$

Sur Γ' en faisant $u = \omega_3 + v$ $(0 < v < 2\omega_1)$, on trouve la condition :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \left(\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \right) = 0,$$

c'est-à-dire à cause de l'équation (19) :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

Finalement, on voit donc, en changeant légèrement les notations, que la fonction :

(468) $\gamma_0(Z) = A_0 \zeta u + A_1 \zeta_1 u + A_2 \zeta_2 u + A_3 \zeta_3 u + C,$

avec

(469) $$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

où les A et C sont des constantes réelles, vérifie toutes les conditions énoncées pour $\gamma(Z)$.

Nous allons maintenant constater que la fonction Φ_1 que nous cherchions peut s'exprimer au moyen de Φ_0 et de γ_0 sous la forme

$$\Phi_1 = \Phi_0 \gamma_0$$

moyennant un choix convenable des constantes qui interviennent dans cette expression. Par des transformations faciles, qu'on peut tirer des formules (45), on met Φ_0 sous la forme :

$$\Phi_0 = i\sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_3(u - \omega_1)}{\sigma_3 u\, \sigma(u - \omega_1)}} = \left(\sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}}\right) \times \text{Cte}\ .$$

En faisant rentrer le facteur constant, dans les coefficients de γ_0, nous poserons donc :

(470) $$\Phi_1(Z) = \sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}} \left[A_0 \zeta u + A_1 \zeta_1 u + A_2 \zeta_2 u + A_3 \zeta_3 u + C\right]$$

Voyons quelles conditions il nous reste à réaliser :

1° Il faut que le mouvement soit symétrique par rapport à l'axe oy du plan z, et que la pression totale soit finie sur chacune des deux lames (cf. Chap. XVII).

2° Il faut satisfaire aux conditions (463) à l'infini, ce qui revient écrire que :

(471) $$\Phi_1 = i\,U \qquad \text{pour} \qquad u = \frac{\omega_3}{2}$$

Pression totale sur Γ. — D'après la formule (349), la pression totale sur Γ, si Γ était seule dans le fluide indéfini, serait :

(472) $$\mathcal{R}' = -\frac{\rho}{r}\int_{\text{arr. de }\Gamma}\left[U - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^2 dx$$

où l'intégrale est étendue à l'arrière de Γ. Ainsi qu'il résulte des calculs qui ont été développés à cet endroit, le résultat provenait de de ce que, dans la formule (générale même si le fluide ne s'étend pas à l'infini dans toutes les directions) :

$$(473)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{R}_y = -\displaystyle\int_{\text{arr.}} \left[U - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]^2 dx - \\ \text{Part réelle de } \dfrac{\rho}{2} \displaystyle\int_{\text{contour de }\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 dz\ . \end{array}\right.$$

Dans le cas du fluide indéfini, on a constaté alors que l'intégrale curviligne figurant au second membre était nulle, ce qui donnait l'équation (472).

On peut constater qu'il n'en est plus ainsi dans notre problème actuel. Cependant, retenons que l'on peut modifier le contour auquel on applique la dernière intégrale, sans changer la valeur de celle-ci, dès que, dans la déformation pour passer du contour de Γ au nouveau contour, on ne rencontre aucun point de Γ'', ni le point à l'infini. Il en résulte donc que $\mathfrak{R}_y$ sera fini, dès que l'expression $\mathfrak{R}'$ fourni par (472) le sera elle-même ; il est donc nécessaire que $\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - U\right]^2$ *soit intégrable sur la face arrière de* Γ (et de Γ'').
Mais d'après (465) et (461), on a :

$$U - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{Part. imag. } \Phi_1 = \mathcal{I}\,(\Phi_1)$$

Donc il est nécessaire que :

$$\left[\mathcal{I}\,(\Phi_1)\right]^2 \frac{dx}{du}$$

soit intégrable par rapport à u dans l'intervalle ω_1 $2\,\omega_1$ qui correspond à l'arrière de Γ

Or on a, sur Γ :

$$\frac{dx}{du} = i\,B\left[p\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right) - p\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)\right] = -\,i\,B\,\frac{p'u\,p'\dfrac{\omega_3}{2}}{\left(pu - p\,\dfrac{\omega_3}{2}\right)^2};$$

cette expression s'annule comme $(u - \omega_1)$, ou comme $(u - 2\,\omega_1)$, pour $u = \omega_1$, ou $2\,\omega_1$. D'autre part, dans l'expression (470) de Φ_1, le crochet devient infini comme $\dfrac{1}{u - 2\,\omega_1}$, si $A_0 \neq 0$, pour $u = 2\,\omega_1$. Pour $u = \omega_1$, si $A_1 \neq 0$, le crochet devient infini comme $\dfrac{1}{u - \omega_1}$. Quant au radical Φ'_0 qui figure en facteur, il s'annule comme $\sqrt{u - 2\,\omega_1}$ pour $u = 2\,\omega_1$ et il devient infini

comme $\dfrac{1}{\sqrt{u - \omega_1}}$ pour $u = \omega_1$. En conséquence, si $A_1 \neq 0$, l'intégrale considérée deviendra infinie, à cause de la limite ω_1 de l'intervalle.

Il est donc nécessaire de prendre $A_1 = 0$.

Un raisonnement analogue pour la paroi Γ' conduira à la condition $A_3 = 0$.

La relation (469) donnera alors $A_0 + A_2 = 0$, et la fonction γ_0 placée entre crochet deviendra :

$$\gamma_0 = A_0 (\zeta u - \zeta_2 u) + C \qquad \text{ou bien (éq. 50)}$$

$$\gamma_0 = A_0 \frac{p' u}{2 (p u - e_2)} = A_0 \frac{\sigma_1 u \, \sigma_2 u \, \sigma_3 u}{\sigma^3 u \, \dfrac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}} = A_0 \frac{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}{\sigma u \, \sigma_2 u}$$

De sorte qu'en mettant P et Q à la place de A_0 et C, il vient :

$$\Phi_1 = P \sqrt{\frac{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}{\sigma u \, \sigma_2 u}} + Q \sqrt{\frac{\sigma u \, \sigma_2 u}{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}} . \tag{474}$$

Maintenant occupons-nous de la symétrie rappelée plus haut. Si nous changeons u en $u + \omega_3$ on voit de suite, que les formules (458), que nous passerons du point de Γ au point de Γ', qui lui est symétrique par rapport à l'origine du plan z. Sur la face avant $(0 < u < \omega_1)$ Φ_1 se réduit à $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ c'est-à-dire à $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$; et aux deux points symétriques, les deux valeurs de Φ_1 doivent donc être opposées, puisque les vitesses doivent être symétriques par rapport à 0.

Or on trouve sans difficulté que la transformation de u en $u + \omega_3$ transforme Φ_1 en :

$$P \sqrt{(e_1 - e_3) \frac{\sigma u \, \sigma_2 u}{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}} + Q \sqrt{\frac{1}{e_1 - e_3} \frac{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}{\sigma u \, \sigma_2 u}}$$

Cette quantité doit être égale à :

$$- P \sqrt{\frac{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}{\sigma u \, \sigma_2 u}} - Q \sqrt{\frac{\sigma u \, \sigma_2 u}{\sigma_1 u \, \sigma_3 u}}$$

d'où la condition unique :

$$Q = - P\sqrt{e_1 - e_3} \text{ , et l'expression de } \Phi_1 \text{ :}$$

$$\Phi_1 = P\left[\sqrt{\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}} - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}}\right].$$

Enfin nous achèverons la détermination de Φ_1 en explicitant la condition (471) à l'infini.

Le calcul, dont on trouvera le détail dans mon *Mémoire du Journal de Mathématiques* (1928) conduit, en écrivant que Φ_1 prend la valeur $i\,U$ pour $u = \frac{\omega_3}{2}$, à la condition :

$$P = - \frac{U}{\sqrt{2}\,(e_1 - e_3)^{1/4}}$$

D'où finalement :

$$(475) \quad \Phi_1 = - \frac{U}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{(e_1 - e_3)^{1/4}}\sqrt{\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}} - (e_1 - e_3)^{1/4}\sqrt{\frac{\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}}\right\}$$

Calcul de la pression totale sur une lame. — Pour plus de clarté, reprenons le calcul qui conduit à l'expression de la résistance sur chaque lame. Par exemple, sur Γ, en posant $u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ la pression p sera donnée par :

$$p = \begin{cases} p_1 = \rho\, U\, v' - \frac{\rho}{2}\,(u'^2 + v'^2) \;\ldots\; \text{à l'avant} \\ p_2 = \rho\, U\, v' - \frac{\rho}{2}\, U^2 \;\ldots\;\ldots\; \text{à l'arrière} . \end{cases}$$

Les conditions imposées de φ entraînent d'ailleurs :

$$v' = U \;\ldots\; \text{à l'avant}$$

$$u' = 0 \;\ldots\; \text{à l'arrière}$$

de sorte que :

$$p_1 = \frac{\rho}{2}\,(U^2 - u'^2)$$

$$p_2 = \rho\, U\, v' - \frac{\rho}{2}\, U^2 .$$

Et la pression totale sur Γ sera l'intégrale de $p\,dx$ calculée sur tout le contour de Γ. On trouve ainsi :

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho}{2} U^2 \int_{z_1}^{z_2} dx - \frac{\rho}{2} U^2 \int_{z_2}^{z_1} dx - \frac{\rho}{2} \int_{z_1(\text{av.})}^{z_2} u'^2\,dx + \rho U \int_{z_2(\text{arr.})}^{z_1} v'dx$$

c'est-à-dire :

$$\mathfrak{R} = \rho U^2 l - \frac{\rho}{2} \int_{z_1(\text{av.})}^{z_2} u'^2\,dx + \rho U \int_{z_2(\text{arr.})}^{z_1} v'\,dx.$$

D'ailleurs, à l'avant de la lame, u' est donné par la formule (475), où les radicaux ont leur valeur arithmétique, et où Φ_1 se réduit à u'. Si l'on passe sur la paroi arrière $(\omega_1 < u < 2\,\omega_1)$ en évitant, dans le plan u, le point ω_1 au moyen d'une petite demi-circonférence dans le demi-plan supérieur, on voit de suite que $\sqrt{\dfrac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}}$ devient $-i\sqrt{\dfrac{-\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}}$, le dernier radical étant encore arithmétique ; en sorte qu'à l'arrière, on a :

$$v'_{(\text{arr.})} = U$$

$$-\frac{U}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(e_1 - e_3)^{1/4}} \sqrt{\frac{-\sigma_1 u\, \sigma_3 u}{\sigma u\, \sigma_2 u}} + (e_1 - e_3)^{1/4} \sqrt{\frac{-\sigma u\, \sigma_2 u}{\sigma_1 u\, \sigma_3 u}} \right\}.$$

On voit donc que le calcul de $\int u'^2\,dx$ sera fort aisé, mais qu'il n'en sera pas de même pour l'intégrale $\int v'\,dx$ où interviendront des radicaux portant sur les diverses fonctions σ_α.

Mais on peut éviter le calcul de cette dernière intégrale, par un artifice que voici :

Observons d'abord que, d'une façon toute pareille à la précédente, on peut écrire pour la pression sur la seconde lame Γ', pression évidemment égale à $\mathfrak{R}$,

$$\mathfrak{R} = \rho U^2 l - \frac{\rho}{2} \int_{z_4(\text{av.})}^{z_3} u'^2\,dx + \rho U \int_{z_3(\text{arr.})}^{z_4} v'\,dx.$$

De sorte que nous pouvons écrire, plus symétriquement :

$$2\mathfrak{R} = 2\rho U^2 l - \frac{\rho}{2} \left\{ \int_{z_1(\text{av.})}^{z_2} u'^2\,dx + \int_{z_4}^{z_3} u'^2\,dx \right\}$$

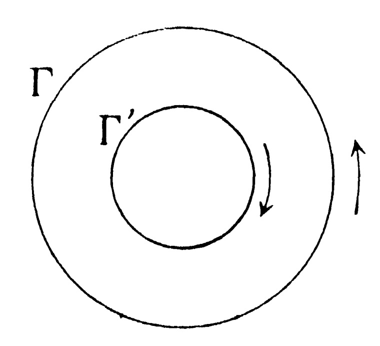
$$+ \rho U \left\{ \int_{z_2(\text{arr.})}^{z_1} v'\,dx + \int_{z_3(\text{arr.})}^{z_4} v'\,dx \right\}.$$

Dans le premier crochet du second membre, les deux termes sont évidemment égaux, par raison de symétrie. Pour nous débarrasser du second crochet, introduisons l'intégrale :

$$J = \int \Phi_1 \, dz = \int \Phi_1 (Z) \frac{dz}{dZ} dZ$$

étendue aux frontières du domaine annulaire dans le plan Z, dans le sens des flèches indiquées par la figure. Le long des deux frontières, dz se réduit à dx, et l'on sait que :

$$u' - i v' = - i U + \Phi_1 .$$



Donc :

$$J = \int (u' - i v' + i U) \, dz = \int_{z_1 (av.)}^{z_2} u' \, dx + \int_{z_2 (arr.)}^{z_1} i (U - v') \, dz$$
$$+ \int_{z_4 (av.)}^{z_3} u' \, dx + \int_{z_3 (arr.)}^{z_4} i (U - v') \, dz ,$$

puisque $v' = U$, à l'avant, et $u' = 0$ à l'arrière. Donc, enfin :

$$J = \left(\int_{z_1}^{z_2} u' \, dx + \int_{z_4}^{z_3} u' \, dx \right)_{(av.)} - 2 i U l - i \left(\int_{z_2}^{z_1} v' \, dx + \int_{z_3}^{z_4} v' \, dx \right)_{(arr.)}$$

Et, par suite :

$$\mathcal{I}(J) = - 2 U l - \left(\int_{z_2}^{z_1} v' \, dx + \int_{z_3}^{z_4} v' \, dx \right)_{(arr.)}$$

Nous en conclûrons donc :

$$(476) \qquad 2 \mathcal{R} = - \rho \int_{z_1 (av.)}^{z_2} u'^2 \, dx - \rho \, U \mathcal{I}(J).$$

L'intégrale J se ramenant par ailleurs à un calcul de résidus, pour les pôles de la fonction $\Phi_1 \frac{dz}{dZ}$ situés dans la couronne, on

voit que la marche à suivre sera aisée. Il n'y a d'ailleurs ici qu'un seul pôle, qui correspond à $u = \frac{\omega_3}{2}$, c'est le point $Z_0 = q^{1/2}$.

On trouvera le calcul détaillé des expressions qui figurent dans la figure (476), dans notre Mémoire cité. On trouve finalement :

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho\, l\, U^2}{2} \left[1 - i\, \eta_1\, \omega_3 + 2\, i\, \omega_1\, \zeta \frac{\omega_3}{2} - \omega_1 \left(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3} \right) \right].$$

Il est clair que la même méthode s'appliquera à un grand nombre d'autres exemples concrets.

Conclusion. — Nous avons développé, dans les chapitres précédents, un certain nombre d'exemples, poussés jusqu'au calcul numérique, comme application de la méthode de M. Oseen. Les résultats numériques, on l'a vu, concordent mal avec les résultats expérimentaux. Il ne faut pas s'en étonner, et nous en avons vu la raison, en discutant les caractères de la solution générale. Mais, de toute façon, l'importance des travaux relatifs à ces questions apparaissait *a priori* comme très grande, tout au moins en vue de faciliter la découverte d'une théorie plus complète et plus pratiquement satisfaisante. Les travaux les plus récents semblent confirmer puissamment cette manière de voir, et il y a lieu de penser que les résultats expérimentaux trouveront bientôt une explication, au moins dans certains cas, rigoureuse ; nous souhaitons que le présent exposé puisse faciliter les efforts des chercheurs dans cette voie nouvelle.